ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

SÉRIE MATHÉMATIQUE

№ 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1937

Ответственный редактор — академик-секретарь Отделения математических и естественных наук академик А. Е. Ферсман

Редакционная коллегия — Президиум Математической группы ОМЕН:
акад. И. М. Виноградов, акад. С. Н. Бернштейн, проф. Б. И. Сегал

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Б. А. ВЕНКОВ

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ГРУППЕ АВТОМОРФИЗМОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе устанавливается фундаментальная область для группы автоморфизмов квадратичной формы n переменных, сигнатуры $n-2$.

Доказывается, что эта фундаментальная область для каждой данной квадратичной формы, коэффициенты которой находятся в рациональных отношениях, состоит из конечного числа выпуклых пирамид с конечным числом граней.

В основе метода лежит рассмотрение областей Дирихле для вершин полиэдров, являющихся обобщением полигона Клейна. При этом области Дирихле рассматриваются по отношению к обобщенному расстоянию, а именно: расстоянием между двумя точками считается значение билинейной формы, соответствующей данной квадратичной для координат данных точек.

Введение

Пусть

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_i) = \sum_1^n a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{1}$$

вещественная неопределенная квадратичная форма с n переменными определителя $d \neq 0$. Целочисленную подстановку определителя ± 1

$$x_i = s_{i1}y_1 + \dots + s_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

переводящую f в себя, назовем автоморфизмом формы f и группу этих автоморфизмов обозначим через G: точки n-мерного пространства (x_i) и (y_i), координаты которых связаны уравнениями (2), назовем эквивалентными. Поверхность $f = 0$ назовем конусом K.

Мы будем рассматривать лишь тот случай, когда разложение f на квадраты имеет вид:

$$\varepsilon f(x_i) = -y_1^2 - \dots - y_{n-1}^2 + y_n^2, \tag{3}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, а $y_1, \dots, y_n$ — вещественные линейные формы переменных x_i. Точки (x_i), для которых $\varepsilon f > 0$ и $\varepsilon f < 0$, будем называть соответственно внутренними и внешними точками

конуса K. При указанном виде f внутренность конуса K может служить для клейновского изображения неэвклидовой геометрии.

Целью настоящего мемуара является определение внутри K фундаментальной области V группы G. Под этим названием мы понимаем, как обычно, область V, обладающую свойствами: 1) каждая точка внутри K эквивалентна точке V; 2) две различные точки внутри V не эквивалентны. Я доказываю, что область V можно взять в виде конечного или бесконечного числа линейных пирамид, каждая из которых ограничена конечным числом граней и имеет вершину в начале координат (0). В частности, если коэффициенты f целые рациональные, то группа G бесконечна, а область V состоит из конечного числа указанных пирамид.

В других случаях [т. е. когда рассматривается внешняя часть конуса K, или когда разложение f на квадраты имеет другой вид, нежели (3)] фундаментальной области вообще не существует.

Метод, применяемый мною, состоит в обобщении так называемого полигона Клейна (¹). Пусть OA и OB—две полупрямые на плоскости, исходящие из начала координат, и M—совокупность точек с целыми координатами, лежащих внутри угла AOB; расположив нить по ломаной AOB, натянем ее затем на точки M (предполагая их несдвигаемыми). Тогда получим некоторый многоугольник П (Umrisspolygon, по Клейну); изучение этого многоугольника позволило Клейну геометризировать теорию неопределенных бинарных квадратичных форм. Наглядное обобщение этого построения на n-мерное пространство очевидно; заменяя угол AOB конусом K, получим вместо П многогранник P, который назовем охватывающим многогранником (Umrisspolyeder $= UP$) формы f. Строгое оформление этого многогранника изложено в § 4—14 настоящего мемуара.

О конусе второго порядка

§ 1

В ближайших параграфах мы перечислим те свойства конуса K, которые нам понадобятся в дальнейшем; они суть непосредственные обобщения свойств трехмерного конуса.

Пусть

$$f(x_i, y_i) = \sum_1^n a_{ij} x_i y_j \qquad (4)$$

есть билинейная форма, соответствующая квадратичной форме (1). Рассмотрим направление из начала координат O на точку $L(\lambda_i)$; плоскость $f(\lambda_i, x_i) = 0$ назовем диаметральной плоскостью, сопряженной с направлением OL. Если L не лежит

на K, то $f(\lambda_i, x_i) = 0$ есть геометрическое место средин хорд конуса K, параллельных OL; наоборот, ряд параллельных плоскостей $f(\lambda_i, x_i) = k$ $(-\infty < k < +\infty)$ пересекает K по центральным многообразиям, и геометрическое место центров есть прямая OL. Если же L лежит на K (т. е. OL есть образующая конуса K), то плоскость $f(\lambda_i, x_i) = 0$ касается K по этой образующей (точный смысл слова «касается» см. ниже). Во всех случаях прямую OL будем называть сопряженною с плоскостью $f(\lambda_i, x_i) = k$. Далее, плоскость $f(\lambda_i, x_i) = k$ назовем плоскостью эллиптического, параболического или гиперболического направления для конуса K, смотря по тому, проходит ли прямая OL внутри, на границе или вне K.

Пусть

$$F(x_i) = \sum_1^n A_{ij} x_i x_j \quad (A_{ij} = A_{ji}) \tag{5}$$

союзная с f форма; очевидно, что $(-\varepsilon)^{n-1} F(x_i)$ имеет разложение на квадраты того же вида, как (3), т. е. $F = 0$ есть конус, топологически подобный конусу K. Замечая, что число $d = \det f$ имеет знак $\varepsilon(-\varepsilon)^{n-1}$, и полагая $\varepsilon' = \pm 1 = \operatorname{sgn}(\varepsilon d)$, найдем, что неравенство $\varepsilon' F(x_i) > 0$ определяет внутренность союзного конуса. Из тождества

$$F(a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1n}\lambda_n, \ldots, a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{nn}\lambda_n) = d f(\lambda_i) \tag{6}$$

вытекает, что плоскость $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = k$ будет плоскостью эллиптического, параболического или гиперболического направления для K, смотря по тому, проходит ли нормаль (p_i) этой плоскости внутри, на границе, или вне союзного конуса.

ТЕОРЕМА 1. *Если $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = 0$ плоскость эллиптического или гиперболического направления, то можно найти вещественную линейную подстановку*

$$y_1 = \alpha_i x_1 + \ldots, \ \ldots, \ y_n = \sqrt{\frac{\pm \varepsilon d}{F(p_i)}}\,(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n),$$

приводящую f к виду

$$\varepsilon f(x_i) = -y_1^2 - \ldots - y_{n-2}^2 \mp y_{n-1}^2 \pm y_n^2,$$

причем верхние знаки имеют место в случае эллиптической, нижние—в случае гиперболической плоскости.

Рассмотрим форму $\varphi = f - \lambda(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)^2$; из условия $\det \varphi = 0$ получаем $\lambda = \dfrac{d}{F(p_i)}$.

Пусть $\varphi = \pm y_1^2 \pm \ldots \pm y_r^2$, где $r < n$ и $y_1, \ldots, y_r$ вещественные, линейно-независимые формы. Не может быть $r < n-1$, так как иначе было бы $d = 0$; следовательно, $r = n-1$ и

$$\varepsilon f = -y_1^2 - \ldots - y_{n-2}^2 \mp y_{n-1}^2 \pm y_n^2,$$

где y_n имеет указанное выше значение. Очевидно, что определитель форм y_i не равен нулю, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $p_1x_1 + \dots + p_nx_n = 0$ *плоскость параболического направления, то существует вещественная линейная подстановка* $y_1 = a_1x_1 + \dots, \dots, y_n = p_1x_1 + \dots + p_nx_n$, *приводящая* f *к виду* $\varepsilon f(x_i) = -y_1^2 - \dots - y_{n-2}^2 + y_{n-1}y_n$.

Пусть $p_n \neq 0$; выражая x_n через $y_n, x_1, \dots, x_{n-1}$, подставляя это значение в $f(x_i)$ и пользуясь тождеством

$$f(t_i + u_i) = f(t_i) + 2f(t_i, u_i) + f(u_i), \tag{7}$$

получим $\varepsilon f(x_i) = y_n y_{n-1} + \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$, где [см. (1)]

$$y_{n-1} = \frac{\varepsilon a_{nn}}{p_n^2} y_n +$$
$$+ \frac{2\varepsilon}{p_n}\left[a_{n1}x_1 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1} - \frac{a_{nn}}{p_n}(p_1x_1 + \dots + p_{n-1}x_{n-1})\right],$$
$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \varepsilon f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{p_1x_1 + \dots + p_{n-1}x_{n-1}}{p_n}\right).$$

Легко доказать, что $\det\varphi = 0$; именно, преобразуя $\varepsilon f(x_i)$ подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\frac{p_1}{p_n} & -\frac{p_2}{p_n} & \dots & -\frac{p_{n-1}}{p_n} & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

найдем, что $\det\varphi$ будет равен значению формы $\varepsilon^{n-1}F$ для алгебраических дополнений последнего столбца подстановки (8), т. е.

$$\det\varphi = \pm F\left(\frac{p_1}{p_n}, \dots, \frac{p_{n-1}}{p_n}, 1\right) = 0.$$

Значит, $\varphi = \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_r^2$, где $r \leqslant n-2$ и y_i — вещественные линейно-независимые формы переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$. Если бы $r < n-2$, то $d = 0$; поэтому $r = n-2$, $\varepsilon f = y_{n-1}y_n - y_1^2 - \dots - y_{n-2}^2$, что и требовалось доказать.

§ 2

Пусть $\varphi = p_1x_1 + \dots + p_nx_n = 0$ плоскость эллиптического направления для конуса K. Из теоремы 1 вытекает, что для всех точек внутри и на границе K, кроме точки O, $\varphi \neq 0$, так что эти точки можно разбить на два множества K' и K'', определяемых условиями: $\varphi > 0$ и $\varphi < 0$. Эти множества назовем полостями конуса K. Точки, для которых $\varepsilon f > 0$ и $\varepsilon f = 0$, будем называть лежащими внутри и на границе соответственной полости. Очевидно, что K'' симметрична с K' относительно начала координат.

При помощи теоремы 1 легко доказать, что полость K' есть тело выпуклое, т. е. если A и B точки K', то всякая точка C отрезка AB также принадлежит K'. При этом C лежит на границе K' в том и только в том случае, когда A и B лежат на границе K' и прямая AB проходит через точку O. Отсюда, далее, вытекает, что определение K' и K'' не зависит от выбора плоскости $\varphi = 0$, т. е. что для всякой другой эллиптической плоскости $\psi = 0$ полости K', K'' остаются без изменения, либо меняются местами.

Из той же теоремы 1 вытекает, что всякая плоскость эллиптического направления $\varphi = k$ ($k > 0$), пересекающая K', отсекает от K' кусок конечных размеров, т. е. область $0 < \varphi \leqslant k$, $\varepsilon f \geqslant 0$ конечна.

Аналогичные следствия вытекают из теоремы 2 для параболических плоскостей. Пусть $\varphi = f(\lambda_i, x_i) = 0$ такая плоскость [т. е. $f(\lambda_i) = 0$]; условиям $\varphi = 0$, $\varepsilon f \geqslant 0$ удовлетворяют только точки прямой $(\lambda_i t)$ $(-\infty < t < +\infty)$, т. е. плоскость $\varphi = 0$ касается конуса K. Для всех точек полости K', не лежащих на луче $(\lambda_i t)$ $(0 < t < \infty)$, выражение φ сохраняет постоянный знак; таким образом для определения полостей K', K'' может служить и любая плоскость параболического направления.

Из сказанного в этом параграфе легко также вывести следующее: если (λ_i), (μ_i)—две точки полости K', то $\varepsilon f(\lambda_i, \mu_i) \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место только в том случае, когда (λ_i), (μ_i) лежат на границе K' и на одном луче из начала координат.

Что касается плоскостей гиперболического направления $\varphi = k$, то любая из них рассекает полость K' на две бесконечные части.

§ 3

Рассмотрим линейную подстановку $X_i = \varepsilon(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; из (6) видно, что точка (x_i) внутри или на границе K переходит в точку (X_i) внутри или на границе союзного конуса $F = 0$. При этом полость K' конуса $f = 0$ переходит целиком в некоторую полость $F = 0$, которую назовем соответствующей полости K'. Действительно, если (λ_i) точка внутри K' и (x_i) пробегает K', то, по § 2, $\sum \lambda_i X_i = \varepsilon f(\lambda_i, x_i) > 0$; а так как $\sum \lambda_i X_i = 0$ есть плоскость эллиптического направления для конуса $F = 0$, то точка (X_i) остается в одной полости этого конуса.

Пусть плоскость $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = 0$ движется, касаясь все время конуса K (§ 2); тогда нормаль $(p_i t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ описывает союзный конус $F = 0$. Если же направлять нормаль в ту сторону от плоскости $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = 0$, с которой лежит полость K', то луч $(p_i t)$ $(0 < t < \infty)$ опишет границу соответствую-

щей полости $F=0$. Действительно, пусть (λ_i) точка внутри K'; выбрав знаки p_i по условию $\sum p_i\lambda_i > 0$, найдем по сказанному выше, что точка (p_i) принадлежит соответствующей полости конуса $F=0$. Это можно еще формулировать так: если $p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = k$ эллиптическая или параболическая плоскость, пересекающая K', и $k>0$, то нормаль (p_i) направлена в соответствующую полость $F=0$.

Пусть (λ_i) точка внутри K'; рассмотрим часть двуполого гиперболоида $f(x_i)=f(\lambda_i)$, лежащую в K', и касательную плоскость $f(\lambda_i, x_i)=f(\lambda_i)$ к этому гиперболоиду в точке (λ_i). Из теоремы 1 вытекает, что вся указанная часть гиперболоида [кроме точки (λ_i)] лежит по другую сторону от плоскости $f(\lambda_i, x_i)=f(\lambda_i)$, нежели начало координат.

О вершинах UP

§ 4

Выберем одну определенную полость K' конуса K и обозначим через $\mathfrak{M}$ множество точек с целыми координатами, лежащих внутри K'. Точку (ξ_i) из $\mathfrak{M}$ назовем **вершиной** UP, если существует плоскость эллиптического направления $\varphi=1$ такая, что для всех точек $\mathfrak{M}$ $\varphi \geqslant 1$, причем знак равенства имеет место только для точки (ξ_i).

ТЕОРЕМА 3. *Для всякой вершины* (ξ_i) UP *имеем*:

$$|f(\xi_i)| \leqslant \sqrt[n]{\frac{2^{2n-2}\,n^2\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{n-1}}\,|d|}\,. \tag{9}$$

Проведем через (ξ_i) плоскость $f(\xi_i, x_i)=f(\xi_i)$, сопряженную с направлением $(\xi_i t)$ $(0<t<\infty)$, и докажем, что неравенствам $0<\varepsilon f(\xi_i, x_i) \leqslant \varepsilon f(\xi_i)$, $\varepsilon f(x_i)>0$ не удовлетворяет никакая целая точка, кроме (ξ_i). В самом деле, пусть для точки $(\mu_i) \neq (\xi_i)$ из $\mathfrak{M}$ $\varepsilon f(\xi_i, \mu_i) \leqslant \varepsilon f(\xi_i)$; тогда для симметричной с ней относительно (ξ_i) точки $(\mu_i') = (2\xi_i - \mu_i)$ имеем:

$$\varepsilon f(\mu_i') = 4\varepsilon f(\xi_i) - 4\varepsilon f(\xi_i, \mu_i) + \varepsilon f(\mu_i) > 0;$$
$$\varepsilon f(\xi_i, \mu_i') = 2\varepsilon f(\xi_i) - \varepsilon f(\xi_i, \mu_i) > 0,$$

т. е. (μ_i') также принадлежит $\mathfrak{M}$. Вместе с тем, для одной или обеих точек (μ_i), (μ_i') имеем $\varphi \leqslant 1$, что противоречит определению вершины.

Рассмотрим область M, определяемую неравенствами $0 < \varepsilon f(\xi_i, x_i) \leqslant \varepsilon f(\xi_i)$, $\varepsilon f(x_i) \geqslant 0$, и присоединим к ней симметричную с нею относительно точки (ξ_i) область $\overline{M}$. Обозначим еще через $\overline{K'}$ область, симметричную с K' относительно (ξ_i). Легко видеть, что область $M+\overline{M}$ есть общая часть (Durchschnitt) двух выпуклых

областей K', $\bar{K}'$ и потому сама выпукла. Кроме того, по доказанному выше, область $M+\bar{M}$ не содержит внутри целочисленных точек, кроме своего центра (ξ_i). Следовательно, по теореме Минковского (2), объем $M+\bar{M}$ не превышает 2^n, т. е. объем V области M не превышает 2^{n-1}. Для вычисления V вводим по теореме 1 новые переменные y_i, для которых

$$y_n = \frac{\varepsilon f(\xi_i, x_i)}{\sqrt{|f(\xi_i)|}}, \quad \varepsilon f(x_i) = -y_1^2 - \cdots - y_{n-1}^2 + y_n^2, \quad \left|\frac{D(x_i)}{D(y_i)}\right| = \frac{1}{\sqrt{|d|}}.$$

Тогда

$$V = \int\limits_{(M)} dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{\sqrt{|d|}} \int\limits_{0 < y_n \leqslant \sqrt{|f(\xi_i)|}\ y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2 \leqslant y_n^2} dy_1 \ldots dy_n .$$

Полагая, далее, $y_i = z_i y_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, получим:

$$V = \frac{1}{\sqrt{|d|}} \int\limits_{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y_n \leqslant \sqrt{|f(\xi_i)|}} y_n^{n-1} dz_1 \ldots dz_{n-1}\, dy_n =$$

$$= \frac{|f(\xi_i)|^{\frac{n}{2}}}{n\sqrt{|d|}} \int\limits_{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2 \leqslant 1} dz_1 \ldots dz_{n-1} = \frac{|f(\xi_i)|^{\frac{n}{2}}}{n\sqrt{|d|}} \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Неравенство $V \leqslant 2^{n-1}$ и равносильно (9). Теорема доказана.

О гранях UP

§ 5

Гранью UP назовем плоскость, проходящую через жесткий комплекс точек $\mathfrak{M}$ (т. е. такую систему точек из $\mathfrak{M}$, которая вполне определяет положение плоскости), причем все остальные точки $\mathfrak{M}$ лежат по одну сторону от этой плоскости.

Пусть $\varphi = k$ любая плоскость гиперболического направления для конуса K. По теореме 1 $\varepsilon f(x_i) = -y_1^2 - \ldots - y_{n-2}^2 + y_{n-1}^2 - L\varphi^2$, где $L > 0$, а $y_1, \ldots, y_{n-1}$, φ—линейно-независимые формы от x_i и для полости K' $y_{n-1} > 0$. Системе целых точек в пространстве (x_i) соответствует параллелепипедальная система точек M в пространстве переменных $y_1, \ldots, y_{n-1}$, φ. Построим для этой системы область Вороного, т. е. множество точек, лежащих ближе к точке O (в эвклидовом смысле), чем ко всякой другой точке M, и пусть R число, большее наибольшего расстояния от точки O до точек этой области. Легко видеть, что где бы в пространстве y_i, φ ни помещалась сфера радиуса R, внутри ее всегда найдется точка M. Но очевидно, что как в область

$$y_1^2 + \ldots + y_{n-2}^2 + L\varphi^2 < y_{n-1}^2,\ y_{n-1} > 0,\ \varphi > k,$$

так и в область

$$y_1^2 + \dots + y_{n-2}^2 + L\varphi^2 < y_{n-1}^2, \; y_{n-1} > 0, \; \varphi < k$$

можно поместить целиком сферу радиуса R. Итак, гиперболическая плоскость не может быть гранью UP.

Аналогично докажем, что если $\varphi = 0$ параболическая плоскость и $\varphi > 0$ для полости K', то при всяком $k > 0$ найдется точка $\mathfrak{M}$, для которой $\varphi > k$.

§ 6

Если плоскость эллиптического направления $\varphi = 1$ есть грань UP, то она проходит через конечное число точек $\mu_1, \mu_2, \dots$ из $\mathfrak{M}$, вполне определяющих ее положение. Следовательно, коэффициенты φ суть числа рациональные.

Обозначим через $P(\varphi)$ наименьший выпуклый многогранник в $(n-1)$-мерном пространстве $\varphi = 1$, содержащий точки $\mu_1, \mu_2, \dots$*. Легко видеть, что вершины $P(\varphi)$ совпадают с вершинами UP (в смысле § 4), лежащими в плоскости $\varphi = 1$. Далее, каждая $(n-2)$-мерная грань $P(\varphi)$ есть плоскость в пространстве $\varphi = 1$, на которой лежит не менее $n-1$ точек из $\mu_1, \mu_2, \dots$, вполне определяющих положение этой плоскости. Эту грань можно определить, проведя через нее плоскость вида $l_1x_1 + \dots + l_nx_n = 0$. Итак, каждая грань $P(\varphi)$ определяется выражением $\sum l_ix_i$, обладающим следующими свойствами: 1) числа l_i целые без общего делителя; 2) плоскость $\sum l_i^2 x_i = 0$ проходит через такой комплекс точек $\mathfrak{M}$ на $\varphi = 1$, который определяет коэффициенты l_i до множителя; 3) для остальных точек $\mathfrak{M}$ на $\varphi = 1$ $\sum l_ix_i > 0$.

§ 7

ЛЕММА 1. *Если* $\varphi = p_1x_1 + \dots + p_nx_n = 0$ *иррациональная плоскость* (*т. е.* p_i *не пропорциональны целым числам*), *то при всяком* $k > 0$ *найдется целая точка* (x_i), *для которой* $0 < \varphi < k$.

Для $n = 1$ лемма тривиальна; предполагая ее доказанной для $n-1$ переменных, положим $\varphi' = p_1x_1 + \dots + p_{n-1}x_{n-1}$. Если плоскость $\varphi' = 0$ иррациональна, то, полагая $0 < \varphi' < k$, $x_n = 0$, найдем искомую точку. В противном случае $\varphi' = \omega(p_1'x_1 + \dots + p_{n-1}'x_{n-1})$, где $p_1', \dots, p_{n-1}'$ целые числа без общего делителя, и число $\frac{p_n}{\omega}$ иррационально; подобрав целые числа a, b по условию

* Относительно конечных многогранников см. (3).

$0 < \omega a + p_n b < k$ и полагая $p_1' x_1 + \ldots + p_{n-1}' x_{n-1} = a$, $x_n = b$, найдем опять искомую точку. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Если* $\varphi = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = 0$ *иррациональная параболическая плоскость для конуса* K ($\varphi > 0$ *для полости* K'), *то, как бы ни было мало* $k > 0$, *всегда найдется точка множества* $\mathfrak{M}$, *для которой* $0 < \varphi < k$.

Введем по теореме 2 линейные формы $y_1, \ldots, y_{n-1}$, $y_n = \varphi$ переменных x_i, для которых $\varepsilon f(x_i) = -y_1^2 - \ldots - y_{n-2}^2 + y_{n-1} y_n$, и пусть M — параллелепипедальная система в пространстве y_i, соответствующая системе целых точек x_i. Возьмем k' по условию $0 < k' < k$; на основании леммы, в системе M найдется примитивный вектор (a_i), для которого $0 < a_n < k - k'$. Выберем в M новую систему основных векторов $(a_i), (a_i'), \ldots, (a_i^{(n-1)})$ так, чтобы среди них был вектор (a_i); тогда точки M будут получаться по формулам

$$y_i = a_i u_0 + a_i' u_1 + \ldots + a_i^{(n-1)} u_{n-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (10)$$

при произвольных целых u_i. Рассмотрим, далее, $n-1$ линейных форм w_s переменных $u_1, \ldots, u_{n-1}$, определяемых равенствами:

$$y_s = \frac{a_s}{a_n} y_n + w_s, \quad w_s = (a_s' u_1 + \ldots + a_s^{(n-1)} u_{n-1}) -$$
$$- \frac{a_s}{a_n} (a_n' u_1 + \ldots + a_n^{(n-1)} u_{n-1}) \quad (s = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Очевидно, что формы w_s независимы, так что можно найти значения переменных $u_1 = \xi_1, \ldots, u_{n-1} = \xi_{n-1}$, для которых $w_1 = \ldots = w_{n-2} = 0$, $w_{n-1} = \Delta > 0$. Возьмем произвольные интервалы $(m_1, m_1'), \ldots, (m_{n-1}, m_{n-1}')$, длина которых больше единицы, и положим: $\max |w_s| = \alpha_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$ при изменении переменных в этих интервалах; выберем затем настолько большое t, чтобы

$$\left(k \left|\frac{a_1}{a_n}\right| + \alpha_1\right)^2 + \ldots + \left(k \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right| + \alpha_{n-2}\right)^2 <$$
$$< k' \left(t\Delta - k \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| - \alpha_{n-1}\right). \quad (11)$$

Выберем целые u_s в интервалах $m_s + t\xi_s < u_s < m_s' + t\xi_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$ и после этого возьмем целое u_0 по условию $k' < a_n u_0 + a_n' u_1 + \ldots + a_n^{(n-1)} u_{n-1} < k$, что возможно, так как для u_0 получается интервал длины $\frac{k - k'}{a_n} > 1$.

При указанных целых u_i формулы (10) и дадут точку (y_i) системы M, для которой $\varepsilon f > 0$, $0 < \varphi < k$. Действительно, по выбору u_0 $k' < y_n = \varphi < k$ и, далее, по (11)

$$\sum_1^{n-2} y_s^2 = \sum_1^{n-2} \left(\frac{a_s}{a_n} y_n + w_s\right)^2 < \sum_1^{n-2} \left(k \left|\frac{a_s}{a_n}\right| + \alpha_s\right)^2 <$$
$$< k' \left(t\Delta - k \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| - \alpha_{n-1}\right) < y_n y_{n-1}.$$

Теорема доказана.

Пусть $\varphi = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = 0$ касательная плоскость к конусу K и $\varphi > 0$ для полости K'. Если эта плоскость иррациональна, то никакая параллельная ей плоскость $\varphi = k$ не может быть гранью, так как она не проходит через жесткий комплекс целых точек. Если же $\varphi = 0$ рациональна и p_i — целые числа без общего делителя, то плоскость $\varphi = 1$ есть грань, так как в полосе $0 < \varphi < 1$ нет целых точек, а на плоскости $\varphi = 1$ лежит, как легко убедиться, бесчисленное множество точек $\mathfrak{M}$, образующих жесткий комплекс. Грани этого вида, т. е. параболические, существуют тогда и только тогда, когда уравнение $F(p_i) = 0$ решается в целых числах p_i. Других граней UP, кроме указанных сейчас и в предыдущем параграфе, не существует.

§ 8

Пусть $\varphi = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = 1$ параболическая грань; мы будем рассматривать (аналогично § 6) наименьший выпуклый многогранник $P(\varphi)$ в плоскости $\varphi = 1$, содержащий точки $\mathfrak{M}$. Строгое определение его будет дано ниже.

Введем по теореме 2 линейные формы $y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n = \varphi$ так, чтобы $\varepsilon f(x_i) = -y_1^2 - \ldots - y_{n-2}^2 + y_{n-1} y_n$. Точки на плоскости $\varphi = 1$ определяются тогда $n-1$ координатами $y_1, \ldots, y_{n-1}$; пересечение этой плоскости с конусом K есть $(n-1)$-мерный параболоид $y_1^2 + \ldots + y_{n-2}^2 = y_{n-1}$. Тело $y_1^2 + \ldots + y_{n-2}^2 \leqslant y_{n-1}$ выпукло, так как оно есть сечение полости K' плоскостью $\varphi = 1$. Плоскость $q_1 y_1 + \ldots + q_{n-1} y_{n-1} + q_n = 0$ в $(n-1)$-мерном пространстве y_s назовем плоскостью асимптотического направления, если $q_{n-1} = 0$. Легко видеть, что плоскость неасимптотического направления пересекает параболоид тогда и только тогда, когда $q_1^2 + \ldots + q_{n-2}^2 \geqslant 4 q_{n-1} q_n$ и отсекает в этом случае от тела $y_1^2 + \ldots + y_{n-2}^2 \leqslant y_{n-1}$ кусок конечных размеров.

Пусть M — множество точек $\mathfrak{M}$ на плоскости $\varphi = 1$, выраженных в координатах $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Выберем R таким, чтобы при всяком положении $(n-1)$-мерной сферы радиуса R в пространстве y_s внутри ее нашлась точка той параллелепипедальной системы, частью которой является M (ср. § 5). Пусть $\psi = q_1 y_1 + \ldots + q_{n-1} y_{n-1} + q_n = 0$ произвольная плоскость; так же, как в § 5, убедимся, что при $q_{n-1} = 0$ существуют точки M по обе стороны плоскости $\psi = 0$, а при $q_{n-1} > 0$ существуют точки M, для которых $\psi > 0$. Плоскость $\psi = 0$ $(q_{n-1} > 0)$ назовем гранью $P(\varphi)$, если она проходит через жесткий комплекс точек M, для всех же остальных точек M $\psi > 0$. Выражая ψ через переменные x_i, получим

$$\psi = q_1 y_1 + \ldots + q_{n-1} y_{n-1} + q_n y_n = l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n,$$

где l_i можно предполагать целыми числами без общего делителя. Пусть (λ_i) точка полости K', для которой

$$\varphi = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = 0,$$

и $f(x_i) = 0$ (§ 2); тогда $\lambda_i = \varepsilon' \omega \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p_i}$, где $\varepsilon' = \operatorname{sgn}(\varepsilon d)$, $\omega > 0$. Точке $(x_i) = (\lambda_i)$ соответствует точка $y_1 = \ldots = y_{n-2} = y_n = 0$, $y_{n-1} > 0$ в виду того, что для полости конуса $y_1^2 + \ldots + y_{n-2}^2 = y_{n-1} y_n$, соответствующей K', переменная $y_n > 0$, а следовательно, и $y_{n-1} > 0$. Полагая $x_i = \lambda_i$ в равенстве $q_1 y_1 + \ldots + q_n y_n = l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n$, найдем, что q_{n-1} отличается от $\varepsilon' \sum l_i \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p_i} = \varepsilon' F(p_i, l_i)$ лишь положительным множителем. Итак, подобно § 6 можем сказать, что каждая грань $P(\varphi)$ определяется линейной формой $\sum l_i x_i$, обладающей свойствами: 1) числа l_i — целые без общего делителя; 2) плоскость $\sum l_i x_i = 0$ проходит через такой комплекс точек $\mathfrak{M}$ на $\varphi = 1$, который определяет коэффициенты l_i до множителя; 3) для остальных точек $\mathfrak{M}$ на $\varphi = 1$ имеем $\sum l_i x_i > 0$; 4) $\varepsilon' F(p_i, l_i) > 0$.

Совокупность точек на плоскости $\varphi = 1$, удовлетворяющих всем неравенствам $l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n \geqslant 0$, назовем **многогранником** $P(\varphi)$. Целую точку (ξ_i), для которой $\varphi = 1$, $\varepsilon f > 0$, назовем **вершиной** $P(\varphi)$, если существует плоскость $\sum r_i x_i = 0$ такая, что для всех точек множества $\mathfrak{M}$ на $\varphi = 1$ $\sum r_i x_i \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место лишь для (ξ_i). Легко видеть, что эти вершины суть те и только те вершины UP (в смысле § 4), которые лежат на плоскости $\varphi = 1$.

§ 9

ТЕОРЕМА 5. *Через каждую вершину $P(\varphi)$ проходит конечное число граней, образующих жесткий комплекс (т. е. вполне определяющих положение этой вершины).*

Введем координаты y_s предыдущего параграфа; пусть $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ значения их для данной вершины ($\eta_n = 1$). Так как $y_1 - \eta_1 = 0$ плоскость асимптотического направления, то существует точка (η_s') из M, для которой $\eta_1' - \eta_1 > 0$ (§ 8); затем рассматриваем плоскость

$$\begin{vmatrix} \eta_1' - \eta_1 & \eta_2' - \eta_2 \\ y_1 - \eta_1 & y_2 - \eta_2 \end{vmatrix} = 0$$

и т. д. Таким путем выберем $n-2$ точек $(\eta_s'), \ldots, (\eta_s^{(n-2)})$ из M, для которых

$$\begin{vmatrix} \eta_1' - \eta_1 & \ldots & \eta_{n-2}' - \eta_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_1^{(n-2)} - \eta_1 & \ldots & \eta_{n-2}^{(n-2)} - \eta_{n-2} \end{vmatrix} > 0. \qquad (12)$$

Пусть B_{ij} алгебраические дополнения элементов определителя (12). На основании (12) легко видеть, что в область переменных y_s, определяемую неравенствами

$$B_{s1}(y_1-\eta_1)+\ldots+B_{s,n-2}(y_{n-2}-\eta_{n-2})<0 \quad (s=1,2,\ldots,n-2),$$

$$y_1^2+\ldots+y_{n-2}^2<y_{n-1}, \quad \begin{vmatrix} \eta_1'-\eta_1 & \eta_2'-\eta_2 & \cdots & \eta_{n-1}'-\eta_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(n-2)}-\eta_1 & \eta_2^{(n-2)}-\eta_2 & \cdots & \eta_{n-1}^{(n-2)}-\eta_{n-1} \\ y_1-\eta_1 & y_2-\eta_2 & \cdots & y_{n-1}-\eta_{n-1} \end{vmatrix}>0,$$

можно поместить целиком $(n-1)$-мерную сферу радиуса R (§ 8) и, следовательно, в этой области найдется точка $(\eta_s^{(n-1)})$ системы M. Пусть C_{ij} алгебраические дополнения элементов определителя:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \eta_1'-\eta_1 & \cdots & \eta_{n-1}'-\eta_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(n-1)}-\eta_1 & \cdots & \eta_{n-1}^{(n-1)}-\eta_{n-1} \end{vmatrix}>0.$$

По выбору точек $(\eta_s^{(\nu)})$

$$C_{s,n-1}>0 \quad (s=1,2,\ldots,n-1);$$

поэтому плоскости

$$\psi_s=C_{s1}(y_1-\eta_1)+\ldots+C_{s,n-1}(y_{n-1}-\eta_{n-1})=0 \quad (s=1,2,\ldots,n-1)$$

неасимптотического направления и область, определяемая условиями:

$$y_1^2+\cdots+y_{n-2}^2<y_{n-1}, \qquad \text{хоть одно из } \psi_s\leqslant 0 \ (s=1,2,\ldots,n-1),$$

конечна (§ 8). Пусть m_1, m_2, ... все точки M, принадлежащие этой области; построим на этих точках наименьший $(n-1)$-мерный многогранник P_0 [что возможно, так как среди m_1, m_2,... имеются точки (η_s), ..., $(\eta_s^{(n-1)})$, образующие $(n-1)$-мерный симплекс]. Так как (η_s) есть вершина $P(\varphi)$, то существует плоскость $\omega=0$, проходящая через (η_s), причем $\omega>0$ для всех остальных точек m_1, m_2, ... ; следовательно (η_s) есть вершина и для P_0.

Докажем, что грани многогранника P_0, проходящие через (η_s), совпадают со всеми гранями $P(\varphi)$, проходящими через вершину (η_s). В самом деле, пусть $\chi=0$ грань $P(\varphi)$ (с положительным коэффициентом у y_{n-1}), проходящая через (η_s); тогда для всех точек M [и, в частности, для (η_s'), ..., $(\eta_s^{(n-1)})$] $\chi\geqslant 0$. Отсюда легко вывести, что тождественно в переменных y_s

$$\chi=\rho_1\psi_1+\cdots+\rho_{n-1}\psi_{n-1},$$

где все $\rho_s\geqslant 0$. Следовательно, для всякой точки M на плоскости $\chi=0$ хотя бы одна из форм $\psi_s\leqslant 0$, т. е. все точки M, лежащие

на плоскости $\chi = 0$, принадлежат к точкам $m_1, m_2, \ldots$, так что $\chi = 0$ является гранью (в обычном смысле слова) многогранника P_0. Пусть, наоборот, $\chi = 0$ есть грань P_0, проходящая через (η_s); тогда для точек $m_1, m_2, \ldots$ $\chi \geqslant 0$. Для всякой же другой точки (y_s) из M имеем $\psi_1 > 0, \ldots \psi_{n-1} > 0$; пользуясь формулами:

$$y_s - \eta_s = \frac{1}{\Delta}\left[(\eta_s' - \eta_s)\,\psi_1 + \ldots + (\eta_s^{(n-1)} - \eta_s)\,\psi_{n-1}\right],$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n-1),$$

получим затем и $\chi > 0$, так что $\chi = 0$ есть грань $P(\varphi)$ в смысле § 8.

Теорема доказана.

Рассмотрим ребра P_0, исходящие из вершины (η_s); каждое из них есть прямолинейный отрезок, соединяющий (η_s) с другой вершиной $(\eta_{\nu s})$ многогранника P_0. Легко видеть, что $(\eta_{\nu s})$ является, так же как и (η_s), вершиной $P(\varphi)$; эту вершину будем называть смежною с вершиной (η_s). Итак, все ребра $P(\varphi)$, исходящие из данной вершины, можно характеризовать смежными с нею вершинами $P(\varphi)$, лежащими на этих ребрах. То же замечание справедливо, очевидно, и для эллиптической грани (§ 6).

Что касается практического вычисления многогранника $P(\varphi)$, то для этого удобно ввести понятие о смежных гранях (ср. § 11) и вычислять $P(\varphi)$ постепенно, переходя от каждой грани ко всем смежным с нею.

Грани UP, проходящие через данную вершину

§ 10

По сказанному в § 6, уравнение всякой эллиптической грани можно представить в виде $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = \varkappa$, где $\varkappa > 0$ целое число, а p_i целые числа без общего делителя.

ТЕОРЕМА 6. *Количество параболических граней, проходящих через данную вершину $UP(\xi_i)$ (§ 4), конечно и равно количеству систем целых чисел p_i, удовлетворяющих уравнениям*

$$\xi_1 p_1 + \ldots + \xi_n p_n = 1, \quad F(p_i) = 0;$$

количество эллиптических граней $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = \varkappa$ с данным $\varkappa > 0$, проходящих через (ξ_i), конечно и не превышает количества систем целых чисел p_i без общего делителя, удовлетворяющих условиям

$$\xi_1 p_1 + \ldots + \xi_n p_n = \varkappa, \quad \varepsilon' F(p_i) > 0.$$

Так как $\xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n = 0$ есть плоскость эллиптического направления для союзного конуса $F = 0$ (§ 1), то область $\xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n = \varkappa$, $\varepsilon' F(x_i) \geqslant 0$ конечна. Остальные утверждения вытекают из определения граней (§ 6—7).

ТЕОРЕМА 7. *Количество граней, проходящих через данную вершину UP, конечно.*

Предположим противное и пусть через вершину (ξ_i) проходит бесконечное множество граней

$$\varphi_\nu = p_{\nu 1} x_1 + \ldots + p_{\nu n} x_n = 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

по теореме 6 все эти грани, начиная с некоторой, эллиптические. Множество точек $(p_{\nu i})$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ заключено в конечной области: $\sum \xi_i p_{\nu i} = 1$, $\varepsilon' F(p_{\nu i}) \geqslant 0$, поэтому существует точка сгущения этого множества. Для этой точки (p_i) имеем:

$$\sum p_i \xi_1 = 1, \ \varepsilon' F(p_i) \geqslant 0.$$

Рассмотрим два случая:

1°. $\varepsilon' F(p_i) > 0$. Плоскость $\varphi = \sum p_i x_i = 1$ есть плоскость эллиптического направления, проходящая через вершину (ξ_i). Для всех точек множества $\mathfrak{M}$ $\varphi \geqslant 1$; в самом деле, если бы для какой-нибудь точки множества $\mathfrak{M}$ $0 < \varphi < 1$, то при достаточно большом ν для той же точки было бы $0 < \varphi_\nu < 1$, что невозможно, так как $\varphi_\nu = 1$ есть грань. Пусть $\lambda > 1$ есть минимум выражения φ для точек множества $\mathfrak{M}$, не лежащих на плоскости $\varphi = 1$. Так как плоскость $\varphi = 1$ эллиптическая, то, очевидно, существует число N, не зависящее от $p_{\nu i}$ (весьма близких к p_i) и такое, что $|x_i| < N$ для всех точек области $p_{\nu 1} x_1 + \ldots + p_{\nu n} x_n = 1$, $\varepsilon f(x_i) \geqslant 0$. Пусть $0 < \eta < \frac{\lambda - 1}{nN}$; возьмем плоскость $\varphi_\nu = 1$, отличную от $\varphi = 1$, для которой $|p_{\nu i} - p_i| < \eta$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Для всякой точки множества $\mathfrak{M}$ на плоскости $\varphi_\nu = 1$ имеем

$$\varphi = 1 + \sum_i (p_i - p_{\nu i}) x_i < \lambda,$$

следовательно, $\varphi = 1$. Итак, всякая точка $\mathfrak{M}$ плоскости $\varphi_\nu = 1$ лежит и на плоскости $\varphi = 1$, т. е. точки множества $\mathfrak{M}$ на $\varphi_\nu = 1$ не образуют жесткого комплекса. Мы пришли к противоречию и, значит, случай 1° невозможен.

2°. $F(p_i) = 0$. Плоскость $\varphi = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = 1$ есть плоскость параболического направления, проходящая через (ξ_i). Подобно случаю 1° убедимся, что в полосе $0 < \varphi < 1$ нет точек множества $\mathfrak{M}$, а отсюда на основании § 7 легко видеть, что $\varphi = 1$ есть параболическая грань. Введем координаты § 8:

$$y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n = \varphi,$$

и пусть для точки (ξ_i)

$$y_s = \eta_s \quad (y_n = 1).$$

Пусть

$$q_{\nu 1}\, y_1 + \ldots + q_{\nu, n-1}\, y_{n-1} + q_{\nu n} = 0 \quad (q_{\nu, n-1} > 0) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

все грани многогранника $P(\varphi)$ (§§ 8—9), проходящие через вершину (η_s), и $(\eta_{\nu s})$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ — все смежные с (η_s) вершины $P(\varphi)$. Обозначим через $r_1 y_1 + \ldots + r_n y_n$ линейную форму $\sum\limits_i (p_{\nu i} - p_i)\, x_i$, выраженную в переменных y_i. Так как $\varphi_\nu = 1$ есть грань, то для всех точек множества $\mathfrak{M}$ на плоскости $\varphi = 1$ имеем:

$$\sum_i (p_{\nu i} - p_i) x_i = r_1 y_1 + \ldots + r_{n-1} y_{n-1} + r_n \geqslant 0;$$

в частности,

$$r_1 \eta_{\nu 1} + \ldots + r_{n-1} \eta_{\nu,\, n-1} + r_n =$$
$$= r_1 (\eta_{\nu 1} - \eta_1) + \ldots + r_{n-1} (\eta_{\nu, n-1} - \eta_{n-1}) \geqslant 0$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Отсюда вытекает, что тождественно в переменных y_i имеем [(4), § 14]

$$r_1 (y_1 - \eta_1) + \ldots + r_{n-1} (y_{n-1} - \eta_{n-1}) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{k} \rho_\nu [q_{\nu 1} (y_1 - \eta_1) + \ldots + q_{\nu, n-1} (y_{n-1} - \eta_{n-1})],$$

или

$$r_1 y_1 + \ldots + r_n y_n = \sum_{\nu=1}^{k} \rho_\nu (q_{\nu 1} y_1 + \ldots + q_{\nu n} y_n), \tag{13}$$

где все $\rho_\nu \geqslant 0$.

Положим

$$q_{\nu 1} y_1 + \ldots + q_{\nu n}\, y_n = l_{\nu 1}\, x_1 + \ldots + l_{\nu n}\, x_n \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

причем $\sum l_{\nu i} x_i$ суть линейные выражения, характеризующие грани $P(\varphi)$, проходящие через вершину (ξ_i) и обладающие перечисленными в § 8 свойствами. Переходя в (13) к переменным x, получим:

$$p_{\nu i} = p_i + \rho_1 l_{1i} + \rho_2 l_{2i} + \ldots + \rho_k l_{ki} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Рассмотрим квадратичную форму:

$$\Phi(x_i) = \varepsilon' F(x_i) - \varepsilon' F(p_i, x_i) \sum \xi_i x_i;$$

для этой формы $\Phi(p_i) = 0$ и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} = \varepsilon' \frac{\partial F}{\partial x_\nu} - \xi_\nu \cdot \varepsilon' F(p_i, x_i) - \frac{1}{2} \varepsilon' \frac{\partial F}{\partial p_\nu} \sum \xi_i x_i, \\ \Phi(p_i, x_i) = \frac{1}{2} \varepsilon' F(p_i, x_i). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Подставляя в Φ выражения (14), находим на основании (15):

$$\Phi(p_{\nu i}) = \rho_1 \cdot \varepsilon' F(p_i, l_{1i}) + \ldots + \rho_k \cdot \varepsilon' F(p_i, l_{ki}) +$$
$$+ \Phi(\rho_1 l_{1i} + \ldots + \rho_k l_{ki}). \tag{16}$$

По свойству чисел l_{si} (§ 8) все $\varepsilon' F(p_i, l_{si}) > 0$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$. Поэтому формула

$$\varepsilon' F(p_i, p_{\cdot i}) = \rho_1 \cdot \varepsilon' F(p_i, l_{1i}) + \ldots + \rho_k \cdot \varepsilon' F(p_i, l_{ki})$$

показывает, что при $p_{\cdot i}$, достаточно близких к p_i, все $\rho_1, \ldots, \rho_k$ будут сколь угодно малы. Рассматривая выражение

$$\Phi(\rho_1 l_{1i} + \ldots + \rho_k l_{ki})$$

как квадратичную форму переменных ρ_s, обозначим через L сумму абсолютных значений коэффициентов этой формы; пусть, далее, h — наименьшая из величин $\varepsilon' F(p_i, l_{si})$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$. Если грань $\varphi_\nu = 1$ отлична от $\varphi = 1$, то в формуле (14) не все $\rho_1, \ldots, \rho_k$ равны нулю и, следовательно, наибольшее из них, которое обозначим через η, будет больше нуля. Возьмем $p_{\cdot i}$ настолько близкими к p_i, чтобы $\eta < \frac{h}{L}$; тогда в правой части (16) последний член будет меньше $L\eta^2$ по абсолютной величине, а совокупность первых членов положительна и не меньше $h\eta$, так что $\Phi(p_{\cdot i})$ будет больше нуля.

Итак, для всех эллиптических граней $\varphi_\nu = 1$, коэффициенты которых достаточно близки к p_i, имеем неравенство:

$$\Phi(p_{\cdot i}) = \varepsilon' F(p_{\cdot i}) - \varepsilon' F(p_i, p_{\cdot i}) > 0,$$

или

$$\frac{F(p_i, p_{\cdot i})}{F(p_{\cdot i})} < 1, \tag{17}$$

которое, как сейчас увидим, невозможно. Пусть $\mathcal{E}$ $(n-1)$-мерный эллипсоид $\varphi_\nu = 1, \varepsilon f(x_i) \geqslant 0$. Для всех точек $\mathcal{E}$ имеем (§ 2) $\varphi = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \geqslant 0$; далее, центр $\mathcal{E}$ лежит (§ 1) в точке с координатами $c_i = \frac{1}{F(p_{\cdot 1})} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p_{\cdot i}}$ и на основании (17) $\sum p_i c_i < 1$. Следовательно, весь эллипсоид $\mathcal{E}$ лежит в полосе $0 \leqslant \varphi < 2$, так что для каждой точки множества $\mathfrak{M}$ на грани $\varphi_\nu = 1$ имеем $\varphi = 1$. Итак, приходим к такому же противоречию, как и в случае 1°.

Теорема доказана.

§ 11

Пусть $\varphi_0 = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = 1$ произвольная грань UP. Возьмем любую $(n-2)$-мерную грань P_{n-2} многогранника $P(\varphi_0)$, характеризованную выражением $\sum l_i x_i$ (§§ 6, 8), и докажем, что из всех $\lambda \neq 0$ существует одно и только одно значение $\lambda = \lambda_0 > 0$, при котором плоскость

$$\varphi = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n + \lambda(l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n) = 1 \tag{18}$$

является также гранью UP. Эту грань назовем **смежной** с $\varphi_0 = 1$ через $(n-2)$-мерную грань P_{n-2}. Очевидно, что при всяком λ плоскость (18) проходит через грань P_{n-2}; далее, при $\lambda < 0$ эта плоскость не может быть гранью UP, так как для точек $\mathfrak{M}$ многогранника $P(\varphi_0)$, не лежащих на P_{n-2}, имеем $\varphi < 1$. Квадратное уравнение

$$\varepsilon' F(p_i + \lambda l_i) = \varepsilon' F(p_i) + 2\lambda \cdot \varepsilon' F(p_i, l_i) + \lambda^2 \cdot \varepsilon' F(l_i) = 0 \qquad (19)$$

имеет один корень $\omega > 0$, а другой $\leqslant 0$. Действительно, так как плоскость $\sum l_i x_i = 0$ проходит через внутренние точки конуса K, то $\varepsilon' F(l_i) < 0$ (§§ 1—2), так что при $\varepsilon' F(p_i) > 0$ корни (19) разных знаков; если же $\varepsilon' F(p_i) = 0$, то по § 8 $\varepsilon' F(p_i, l_i) > 0$, так что уравнение (19) опять имеет корень $\omega > 0$. Рассмотрим два случая:

1°. Все числа $p_i + \omega l_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — целые рациональные. Так как плоскость $\varphi_1 = \sum (p_i + \omega l_i) x_i = 1$ проходит через точки множества $\mathfrak{M}$, то числа $p_i + \omega l_i$ не имеют общего делителя и $\varphi_1 = 1$ есть параболическая грань. Легко доказать, что при $\lambda > 0$ и $\neq \omega$ плоскость (18) не может быть гранью. Действительно, в противном случае $\varepsilon' F(p_i + \lambda l_i) > 0$, $0 < \lambda < \omega$. Пусть для точки множества $\mathfrak{M}$ имеем $\varphi - 1 = \varphi_0 - 1 + \lambda \sum l_i x_i = 0$; не может быть для этой точки $\varphi_0 - 1 > 0$, так как иначе имели бы

$$\sum l_i x_i < 0, \quad 0 < \sum (p_i + \omega l_i) x_i < 1$$

против предположения 1°. Итак, всякая точка множества $\mathfrak{M}$ плоскости $\varphi = 1$ лежит на плоскостях $\varphi_0 = 1$, $\sum l_i x_i = 0$, так что $\varphi = 1$ не может быть гранью.

Таким образом в этом случае $\lambda_0 = \omega$.

2°. Не все числа $p_i + \omega l_i$ целые. В этом случае, по § 7, существует точка множества $\mathfrak{M}$, например (α_i), для которой

$$0 < \sum (p_i + \omega l_i) \alpha_i < 1;$$

для этой точки, очевидно,

$$\sum p_i \alpha_i > 1 \quad \text{и} \quad \sum l_i \alpha_i < 0,$$

так что, полагая

$$\lambda' = \frac{\sum p_i \alpha_i - 1}{-\sum l_i \alpha_i},$$

имеем $0 < \lambda' < \omega$. Легко видеть, что существует лишь конечное число точек множества $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условиям:

$$\sum l_i x_i < 0, \ \frac{\sum p_i x_i - 1}{-\sum l_i x_i} \leqslant \lambda'.$$

Действительно, плоскость $\sum (p_i + \lambda' l_i) x_i = 0$ эллиптического направления и для указанных точек множества $\mathfrak{M}$ имеем:

$$0 < \sum (p_i + \lambda' l_i) x_i \leqslant 1.$$

Далее, указанные точки множества $\mathfrak{M}$ действительно существуют (например, (α_i)); поэтому можно определить

$$\min \frac{\sum p_i x_i - 1}{-\sum l_i x_i} = \lambda_0$$

для всех точек множества $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию $\sum l_i x_i < 0$.

Докажем, что плоскость $\varphi_1 = \varphi_0 + \lambda_0 \sum l_i x_i = 1$ есть грань; действительно, прежде всего $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda' < \omega$, так что плоскость $\varphi_1 = 1$ эллиптическая. Если бы для точки множества $\mathfrak{M}$ было $0 < \varphi_1 < 1$, то для этой точки мы имели бы

$$\sum p_i x_i > 1, \ \sum l_i x_i < 0, \ \frac{\sum p_i x_i - 1}{-\sum l_i x_i} < \lambda_0$$

против определения λ_0; итак, для всякой точки множества $\mathfrak{M}$ имеем $\varphi_1 \geqslant 1$.

Пусть (β_i) одна из точек множества $\mathfrak{M}$, в которых выражение

$$\frac{\sum p_i x_i - 1}{-\sum l_i x_i}$$

достигает своего минимума λ_0; так как $\sum l_i \beta_i < 0$, то точка (β_i) вместе с точками множества $\mathfrak{M}$ на P_{n-2} вполне определяет положение плоскости $\varphi_1 = 1$. Итак, $\varphi_1 = 1$ есть грань; при другом λ, как легко показать, плоскость (18) не может быть гранью.

Существование смежной грани доказано, таким образом, во всех случаях.

Пусть $\varphi_1 = \varphi_0 + \lambda_0 \sum l_i x_i = 1$ грань UP, смежная с $\varphi_0 = 1$ через $(n-2)$-мерную грань P_{n-2} многогранника $P(\varphi_0)$. Очевидно, что P_{n-2} есть $(n-2)$-мерная грань и для многогранника $P(\varphi_1)$, характеризованная выражением $-\sum l_i x_i$, и что $\varphi_0 = 1$ есть, наоборот, грань, смежная с $\varphi_1 = 1$ через P_{n-2}.

§ 12

ТЕОРЕМА 8. *Через каждую вершину UP проходит жесткий комплекс граней UP.*

Пусть (ξ_i) данная вершина; по § 4 существует эллиптическая плоскость $\varphi = 1$ такая, что для всех точек $\mathfrak{M}$ $\varphi \geqslant 1$, причем знак равенства имеет место лишь для (ξ_i). Будем передвигать непрерывно плоскость $\varphi = 1$ так, чтобы она постоянно проходила через точку (ξ_i), чтобы для всех точек множества $\mathfrak{M}$ было всегда $\varphi \geqslant 1$ и чтобы число точек множества $\mathfrak{M}$, попадающих на плоскость $\varphi = 1$, постепенно увеличивалось; мы придем в конце концов к грани $\varphi_0 = 1$. Указанное движение плоскости $\varphi = 1$, как легко видеть, может быть выполнено последовательным вращением вокруг нескольких $(n-2)$-мерных линейных многообразий, так что анали-

тически оно оформляется подобно предыдущему параграфу. Итак, одна грань $\varphi_0=1$, проходящая через (ξ_i), существует. Точка (ξ_i) будет вершиной и для многогранника $P(\varphi_0)$; рассмотрим все $(n-2)$-мерные грани $P(\varphi_0)$, проходящие через эту вершину; пусть эти грани характеризуются выражениями $l_{\nu 1}x_1+\ldots+l_{\nu n}x_n$ ($\nu=1, 2, \ldots, r$). По § 6 и теореме 5 уравнения $\sum l_{\nu i}x_i=0$ ($\nu=1, 2, \ldots, r$) определяют значения $x_i=\xi_i$ с точностью до множителя. Пусть $\varphi_1=1, \ldots, \varphi_r=1$ грани UP, смежные с $\varphi_0=1$ через рассматриваемые $(n-2)$-мерные грани $P(\varphi_0)$; из сказанного в предыдущем параграфе легко вывести, что грани $\varphi_0=1, \ldots, \varphi_r=1$ вполне определяют положение вершины (ξ_i). Теорема доказана.

Пусть (ξ_i) данная вершина UP и $\varphi_\nu=p_{\nu i}x_i+\ldots+p_{\nu n}x_n=1$ ($\nu=0, 1, 2, \ldots, r-1$) все проходящие через нее грани. Рассмотрим линейную пирамиду П с вершиной в (ξ_i), определяемую неравенствами $\sum\limits_i p_{\nu i}(x_i-\xi_i)\geqslant 0$ ($\nu=0, 1, 2, \ldots, r-1$). Так как П имеет внутренние точки [например $(x_i)=(2\xi_i)$], то существуют р е б р а пирамиды* П. Ребром называется полупрямая вида $(\xi_i+t\eta_i)$ $(0<t<\infty)$, которая принадлежит П и на которой сходится не менее $n-1$ граней П, вполне определяющих положение этой полупрямой.

Пусть A любое ребро П; докажем, что на A лежит по крайней мере одна точка множества $\mathfrak{M}$, отличная от (ξ_i). Возьмем на A точку $(\xi_i')\neq(\xi_i)$ и пусть $\varphi_0=1$ любая грань, проходящая через A. Пусть, далее, $\sum l_{\nu i}x_i$ ($\nu=1, 2, \ldots, s$) выражения, характеризующие все $(n-2)$-мерные грани $P(\varphi_0)$, проходящие через вершину (ξ_i), и П(φ_0) $(n-1)$-мерная пирамида, образованная этими гранями, т. е. область

$$\varphi_0=1, \quad \sum l_{\nu i}x_i\geqslant 0 \quad (\nu=1, 2, \ldots, s).$$

Соответственно граням П(φ_0) имеем s граней UP:

$$\varphi_\nu=\varphi_0+\lambda_\nu\sum l_{\nu i}x_i \quad (\lambda_\nu>0,\ \nu=1, 2, \ldots, s),$$

смежных с $\varphi_0=1$, и так как для точки (ξ_i') все $\varphi_\nu\geqslant 1$, то $\sum l_{\nu i}\xi_i'\geqslant 0$ ($\nu=1, 2, \ldots, s$), т. е. ребро A принадлежит П(φ_0). По сказанному в конце § 9, все ребра П(φ_0) можно характеризовать с м е ж н ы м и с (ξ_i) вершинами $P(\varphi_0)$: (ξ_{1i}), (ξ_{2i}), ..., лежащими на этих ребрах, и, так как (ξ_i') принадлежит П(φ_0), то, на основании только что цитированных работ Вороного и Минковского,

$$\xi_i'-\xi_i=\rho_1(\xi_{1i}-\xi_i)+\ldots+\rho_k(\xi_{ki}-\xi_i) \quad (i=1, 2, \ldots, n, \text{ все } \rho>0). \quad (20)$$

* См. (4) § 8—11 и (2) § 19.

Пусть теперь $\varphi_\nu = 1$ любая грань, проходящая через A; для этой грани

$$\sum p_{\nu i}(\xi_i' - \xi_i) = 0, \quad \sum p_{\nu i}(\xi_{1i} - \xi_i) \geqslant 0, \ldots, \quad \sum p_{\nu i}(\xi_{ki} - \xi_i) \geqslant 0$$

[так как (ξ_{1i}), (ξ_{2i}), ... суть точки множества $\mathfrak{M}$]. Поэтому (20) дает

$$\sum p_{\nu i}(\xi_{1i} - \xi_i) = \ldots = \sum p_{\nu i}(\xi_{ki} - \xi_i) = 0.$$

Но так как грани П, проходящие через A, вполне определяют это ребро, то $k = 1$, $\xi_i' - \xi_i = \rho_1(\xi_{1i} - \xi_i)$, т. е. A совпадает с одним из ребер пирамиды $\Pi(\varphi_0)$ и может быть характеризовано вершиной (ξ_{1i}). Наше предложение, таким образом, доказано.

Нетрудно доказать и обратное только что доказанному, именно: если $\varphi_0 = 1$ любая грань П, то всякое ребро $\Pi(\varphi_0)$ есть вместе с тем ребро П. Пусть A_0 ребро $\Pi(\varphi_0)$; так как на A_0 лежит смежная с (ξ_i) вершина, то полупрямая A_0 принадлежит П. По предположению, на A_0 сходится не менее $n-2$ граней P_{n-2}', P_{n-2}'', ... пирамиды $\Pi(\varphi_0)$; легко видеть, что грань $\varphi_0 = 1$ вместе со смежными с нею через P_{n-2}', P_{n-2}'', ... гранями вполне определяет положение A_0, что и требовалось доказать.

Из сказанного вытекает, что каждое ребро UP, исходящее из вершины (ξ_i), может быть характеризовано другой вершиной UP: (ξ_{1i}), лежащей на этом ребре; две вершины (ξ_i), (ξ_{1i}) назовем **смежными вершинами** UP. Пусть $\varphi_1 = 1, \ldots, \varphi_r = 1$ все грани П, проходящие через рассматриваемое ребро; плоскость $\phi = \frac{1}{r}(\varphi_1 + \ldots + \varphi_r) = 1$ обладает, очевидно, следующим свойством: $\phi \geqslant 1$ для всех точек множества $\mathfrak{M}$, причем знак равенства имеет место лишь для точек прямолинейного отрезка, соединяющего (ξ_i) с (ξ_{1i}). Отсюда вытекает, что эта плоскость $\phi = 1$ эллиптическая. Наоборот, легко видеть, что если дан прямолинейный отрезок AB, на котором лежит не менее двух точек множества $\mathfrak{M}$, и если через AB проходит эллиптическая плоскость $\phi = 1$ такая, что $\phi > 1$ для всех точек множества $\mathfrak{M}$, не лежащих на AB, то крайние точки $\mathfrak{M}$ на AB будут смежными вершинами UP.

Определение UP

§ 13

ЛЕММА 2. *Если $\varphi = 0$ эллиптическая плоскость для конуса K и $k > 0$ есть минимум выражения φ для точек множества $\mathfrak{M}$, то на плоскости $\varphi = k$ лежит не менее одной вершины UP.*

Возьмем все точки множества $\mathfrak{M}$, лежащие на плоскости $\varphi = k$, и построим наименьший выпуклый многогранник P, содержащий

эти точки (число измерений P будет $n-1$ или меньше); легко доказать, что каждая вершина P будет вершиной UP.

ЛЕММА 3. *Пусть* (μ_i) *любая точка на границе* K'; *существует грань* UP $\varphi = 1$ *такая, что для точки* (μ_i) $\varphi < 1$.

Сначала покажем, что существует эллиптическая плоскость $\psi = 1$, проходящая через (μ_i) и такая, что $\psi > 1$ для всех точек множества $\mathfrak{M}$. Пусть $\sum q_i x_i = 0$ любая эллиптическая плоскость, причем $\sum q_i \mu_i > 0$; положим

$$p_i = \varepsilon \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \mu_i} + t q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

тогда при достаточно малом $t > 0$ будем иметь:

$$\varepsilon' F(p_i) = 2t|d| \cdot \sum \mu_i q_i + t^2 \cdot \varepsilon' F(q_i) > 0,$$

так что плоскость $\sum p_i \mu_i = \sum p_i x_i$ будет эллиптическая. Сверх того, возьмем t настолько малым, чтобы для всех точек множества $\mathfrak{M}$ в области $\sum q_i x_i < \sum q_i \mu_i$ (которых может быть лишь конечное число) иметь:

$$\sum p_i x_i = \varepsilon f(\mu_i, x_i) + t \sum q_i x_i > \sum p_i \mu_i = t \sum \mu_i q_i.$$

При таком выборе t для всех точек множества $\mathfrak{M}$, очевидно, будет $\sum p_i x_i > \sum p_i \mu_i$, так что, положив $\psi = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i \mu_i}$, найдем требуемую плоскость $\psi = 1$.

Пусть $k > 1$ минимум выражения ψ для точек множества $\mathfrak{M}$; на плоскости $\psi = k$, по лемме 2, лежит вершина UP (ξ_i). Пусть $\varphi_1 = 1, \dots, \varphi_r = 1$ все грани UP, проходящие через эту вершину; так как для всех смежных с (ξ_i) вершин (§ 12) $\psi \geqslant k$, то тождественно

$$\psi - k = \rho_1(\varphi_1 - 1) + \dots + \rho_r(\varphi_r - 1) \quad (\text{все } \rho > 0).$$

Но для точки (μ_i) $\psi < k$, следовательно, хоть одно $\varphi_\nu < 1$, что и требовалось доказать.

§ 14

Из леммы 2 вытекает существование вершин UP, а затем из теоремы 8 — существование граней UP. Пусть $\varphi = 1$ любая грань; множество точек (x_i), удовлетворяющих всем неравенствам $\varphi \geqslant 1$, назовем охватывающим многогранником формы f (UP, см. введение). Из леммы 3 легко вывести, что всякая точка UP лежит внутри K'. Можно доказать также теорему, обратную 8, именно: если через точку UP проходит жесткий комплекс граней UP, то эта точка есть вершина UP (в смысле § 4). На доказательстве этих предложений, однако, не останавливаемся в виду того, что они не имеют значения для нашей цели.

Легко доказать далее, что существует бесчисленное множество вершин UP. В самом деле, возьмем точку (λ_i) на границе K' так, чтобы $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ не были пропорциональны целым числам, и рассмотрим образующую конуса $(\lambda_i t)$ $(0 < t < \infty)$. Пусть $\omega > 0$ любое число; по лемме 3 можно найти грань $\varphi_1=1$ такую, что $\varphi_1 < 1$ для точки $\left(\frac{\lambda_i}{\omega}\right)$. Взяв затем точку пересечения этой грани с образующей $(\lambda_i t)$, найдем новую грань $\varphi_2=1$ такую, что для взятой точки $\varphi_2 < 1$ и т. д. Таким путем получим бесконечный ряд граней $\varphi_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2,\ldots)$; эти грани различны, так как для точки (λ_i) имеем $\omega > \varphi_1 > \varphi_2 \ldots > 0$. Из теоремы 7 вытекает затем, что существует и бесчисленное множество вершин UP.

Целочисленные автоморфизмы формы f

§ 15

Займемся теперь целочисленными автоморфизмами формы f (см. введение). Пусть (2)—такой автоморфизм, s—матрица с элементами s_{ij}, A и B—точки с координатами (x_i), (y_i); мы будем писать $B = As$. Значения форм: билинейной $f(x_i, y_i)$ и квадратичной $f(x_i)$ будем в дальнейшем писать для наглядности в виде $f(A, B)$ и $f(A)$. Если s, t—два автоморфизма и st, как обычно, их произведение, то $(As)t = (A)st$; группа G всех автоморфизмов может быть конечной или бесконечной.

ЛЕММА 4. *Если A и B—две точки и s—любой автоморфизм f, то $f(As, Bs) = f(A, B)$.*

Пусть (α_i), (β_i), (α_i'), (β_i')—координаты точек A, B, As, Bs и X, Y—две переменные; так как подстановка s переводит ряд чисел $X\alpha_i + Y\beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в ряд $X\alpha_i' + Y\beta_i'$, то имеем тождественно в X, Y:

$$f(X\alpha_i + Y\beta_i) = f(X\alpha_i' + Y\beta_i').$$

Приравнивая коэффициенты при XY, получим $f(\alpha_i, \beta_i) = f(\alpha_i', \beta_i')$, что и требовалось доказать.

Пусть A точка внутри полости K'. Так как все эквивалентные A точки лежат внутри конуса K, то подстановки G разделяются на две системы: подстановки s, для которых As принадлежит K', и те, для которых As принадлежит другой полости K''; эти системы обозначим через G' и G''. По лемме 4 $f(A,B) = f(A',B')$, так что подстановки G' переводят всякую другую точку B полости K' в точку той же полости; отсюда вытекает, что G' есть группа. При этом очевидно, что $G'' = G's_0$, где s_0—специальная подстановка $x_i = -y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Подстановка s из G' переводит каждую точку системы $\mathfrak{M}$ (§ 4) в точку той же системы. Пусть m любая вершина UP; по доказанному в теореме 3 имеем для всякой точки $\mu \neq m$ из множества $\mathfrak{M}$ $\varepsilon f(m,\mu) > \varepsilon f(m)$, откуда $\varepsilon f(ms,\mu s) > \varepsilon f(ms)$. Итак, подстановка s переводит вершину UP также в вершину. Далее, грань UP переходит также в грань; при этом из сказанного в § 11 — 12 вытекает, что смежные вершины или грани переходят также в смежные вершины или грани. Наконец, всякая точка UP (§ 14) переводится подстановкой G' также в точку UP.

§ 16

ЛЕММА 5. *Если m точка внутри конуса K, то существует лишь конечное число подстановок s из G, для которых ms лежит в ограниченной части пространства.*

Пусть (μ_i)—координаты m и c_{ij}—элементы обратной матрицы s^{-1}; по условию имеем $|\mu_1 c_{i1} + \ldots + \mu_n c_{in}| < L$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где L — данное постоянное число. Рассмотрим i-тую строку $c_{i1}, \ldots, c_{in}$ матрицы s^{-1}; эта строка совпадает с i-тым столбцом сопряженной с s^{-1} матрицы s'^{-1}, переводящей, как известно, союзную форму (5) в себя. Таким образом для целых чисел $c_{i1}, \ldots, c_{in}$ имеем:

$$|\mu_1 c_{i1} + \ldots + \mu_n c_{in}| < L, \quad F(c_{i1}, \ldots, c_{in}) = A_{ii}. \tag{21}$$

Но, по предположению, $\mu_1 x_1 + \ldots + \mu_n x_n = 0$ есть эллиптическая плоскость для союзного конуса $F = 0$; поэтому условиям (21) удовлетворяет лишь ограниченное число систем чисел $c_{i1}, \ldots, c_{in}$, что и требовалось доказать.

Из леммы 5 вытекает, например, что совокупность подстановок G, переводящих данную точку (ξ_i) внутри конуса K в точку (ξ_i) или $(-\xi_i)$, есть конечная группа. Наоборот, легко видеть, что для всякой конечной подгруппы G_0 группы G существует точка (ξ_i) внутри K, которую подстановки G_0 переводят в $(\pm \xi_i)$. Действительно, пусть G_0 состоит из подстановок $s_1, \ldots, s_k$, $t_1, \ldots, t_l$ $(k > 0,\ l \geqslant 0)$, причем s_i и t_j суть подстановки системы G' и G'' (§ 15). Подстановки $s_1, \ldots, s_k$ образуют подгруппу внутри G_0 с индексом 1 или 2; поэтому, вводя подстановку s_0 § 15, легко доказать, что $s_1, \ldots, s_k$, $s_0 t_1 = s_{k+1}, \ldots$, $s_0 t_l = s_{k+l}$ также образуют группу G_0', которая будет подгруппой G'. Возьмем точку m из множества $\mathfrak{M}$; так как точки $ms_1, \ldots$, ms_{k+l} лежат внутри полости K', и K' выпукла, то точка $(\xi_i) = \frac{1}{k+l}(ms_1 + \ldots + ms_{k+l})$, координаты которой суть арифметические средние координат точек $ms_1, \ldots, ms_{k+l}$, также лежит внутри K'. Легко видеть, что подстановки $s_1, \ldots, s_{k+l}$ переводят точку (ξ_i) в себя, а потому s_i и t_j переводят ее соответственно в (ξ_i) и

$(-\xi_i)$; кроме того, ясно, что ξ_i можно предполагать целыми числами без общего делителя.

ТЕОРЕМА 9. *Порядок всякой конечной подгруппы G есть делитель числа* *

$$2\cdot\overline{n-1|}=2\prod p^{\left[\frac{n-1}{p-1}\right]+\left[\frac{n-1}{p(p-1)}\right]+\left[\frac{n-1}{p^2(p-1)}\right]+\dots},$$

причем произведение берется по всем простым числам $p\leqslant n$.

Пусть G_0—данная подгруппа и G_0'—совокупность элементов, общих G_0 и G'; по замеченному выше, можно найти точку (ξ_i) внутри конуса K, которую подстановки G_0' переводят в себя, причем ξ_i суть целые числа без общего делителя. Совокупность матриц $t=s'$, сопряженных с матрицами s группы G_0', есть группа T; эти подстановки t переводят в себя линейную форму $\sum\xi_i x_i$ и квадратичную $F(x_i)$. Возьмем $n-1$ целочисленных решений $(\alpha_{i1}),\dots,(\alpha_{i,n-1})$ уравнения $\xi_1x_1+\dots+\xi_nx_n=0$ так, чтобы всякое целочисленное решение этого уравнения представлялось в виде

$$x_i=\alpha_{i1}u_1+\dots+\alpha_{i,n-1}u_{n-1}\quad(i=1,\ 2,\dots,n)$$

с целыми u_ν. Для этого необходимо и достаточно, чтобы алгебраические дополнения элементов последнего столбца таблицы

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\dots\alpha_{1,n-1}\ *\\ \dots\dots\dots\\ \alpha_{n1}\dots\alpha_{n,n-1}\ *\end{pmatrix}$$

не имели общего делителя; при этом ясно, что эти алгебраические дополнения равны $\eta\xi_1,\dots,\eta\xi_n$ $(\eta=\pm1)$. Возьмем подстановку t группы T:

$$x_i=c_{i1}y_1+\dots+c_{in}y_n\quad(i=1,\ 2,\dots,n);$$

вводя сюда вместо x,y новые переменные u,v по формулам:

$$x_i=\alpha_{i1}u_1+\dots+\alpha_{i,n-1}u_{n-1},\ y_i=\alpha_{i1}v_1+\dots+\alpha_{i,n-1}v_{n-1},$$

получим:

$$\alpha_{i1}u_1+\dots+\alpha_{i,n-1}u_{n-1}=c_{i1}(\alpha_{11}v_1+\dots+\alpha_{1,n-1}v_{n-1})+\dots+$$
$$+c_{in}(\alpha_{n1}v_1+\dots+\alpha_{n,n-1}v_{n-1}).\qquad(22)$$

Из тождества $\sum\xi_ix_i=\sum\xi_iy_i$ вытекает, что n уравнений (22) друг другу не противоречат и вполне определяют линейную подстановку

$$u_\nu=\bar c_{\nu1}v_1+\dots+\bar c_{\nu,n-1}v_{n-1}\quad(\nu=1,\ 2,\dots,n-1).$$

Из выбора чисел α_{ij} следует, что матрица $\bar t=(\bar c_{\nu\lambda})$ из $(n-1)^2$ чисел $\bar c_{\nu\lambda}$ целочисленна и имеет определитель ±1; эту матрицу будем называть соответствующей матрице $t=(c_{ij})$. Очевидно, что это соответствие обладает свойством: $\overline{t_1t_2}=\bar t_1\cdot\bar t_2$, так что матрицы $\bar t$

* Ср. ([5]).

образуют группу T. Докажем, что различным подстановкам t соответствуют различные $\bar{t}$. Пусть для двух подстановок t_1, t_2 из T имеем $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$; полагая $t_1 = t_2 t_0$, получим $\bar{t}_0 = 1$, откуда легко вывести, что матрица t_0 имеет вид:

$$t_0 = \begin{pmatrix} 1+\lambda_1\xi_1 & \lambda_1\xi_2 & \dots & \lambda_1\xi_n \\ \lambda_2\xi_1 & 1+\lambda_2\xi_2 & \dots & \lambda_2\xi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n\xi_1 & \lambda_n\xi_2 & \dots & 1+\lambda_n\xi_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \dots \lambda_n$ — некоторые числа. Так как подстановка t_0 принадлежит к T, то она переводит в себя форму $\sum \xi_i x_i$, откуда $\xi_1\lambda_1 + \dots + \xi_n\lambda_n = 0$. Далее, t_0 переводит в себя и форму $F(x_i)$, так что, полагая

$$x_i = y_i + \lambda_i(\xi_1 y_1 + \dots + \xi_n y_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

имеем тождественно $F(x_i) = F(y_i)$, откуда

$$2F(\lambda_i, y_i) + (\xi_1 y_1 + \dots + \xi_n y_n) F(\lambda_i) = 0.$$

Положив здесь $y_i = \lambda_i$, получим $F(\lambda_i) = 0$, и затем тождественно в y_i $F(\lambda_i, y_i) = 0$, так что $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, $t_0 = 1$, $t_1 = t_2$. Итак, порядок группы $\bar{T}$ совпадает с порядками групп T, G_0'. Рассмотрим форму с $n-1$ переменными u_i:

$$\varphi(u_1, \dots, u_{n-1}) = -\varepsilon' F(\alpha_{11}u_1 + \\ + \dots + \alpha_{1,n-1}u_{n-1}, \dots, \alpha_{n1}u_1 + \dots + \alpha_{n,n-1}u_{n-1}).$$

Так как $\sum \xi_i x_i = 0$ есть эллиптическая плоскость для конуса $F = 0$, то (теорема 1) форма φ положительная определителя $|d^{n-2} f(\xi_i)|$. Очевидно, что подстановки $\bar{t}$ переводят φ в себя; отсюда, на основании результатов указанной выше статьи Минковского, вытекает, что порядок группы $\bar{T}$ делит $\overline{n-1}|$, а порядок G_0 делит $2\cdot\overline{n-1}|$. Теорема доказана.

§ 17

Пусть $m_1, m_2, \dots$ все вершины UP и m_ν — одна из них. Определим соответственно m_ν область $V(m_\nu)$ по условию: $V(m_\nu)$ есть совокупность точек x пространства, удовлетворяющих всем неравенствам

$$\varepsilon f(x, m_\nu) \leqslant \varepsilon f(x, m_k) \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \tag{23}$$

Очевидно, что область $V(m_\nu)$ выпукла. Обозначим, как прежде (§ 12), через Π пирамиду с вершиною m_ν, образованную всеми гранями UP, проходящими через m_ν.

ТЕОРЕМА 10. *Область $V(m_\nu)$ есть пирамида с конечным числом граней и вершиной в точке $\mathring{O}$. Именно: грани $V(m_\nu)$ суть диаметральные плоскости, сопряженные с направлением ребер Π; ребра*

$V(m_\nu)$ суть прямые, проходящие из начала координат в полость K' и сопряженные с гранями Π.

Пусть V' — конечная пирамида, определяемая неравенствами:

$$\varepsilon f(x, m_\nu) \leqslant \varepsilon f(x, m_{k\nu}) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{24}$$

где $m_{k\nu}$ — все вершины, смежные с m_ν (§ 12); очевидно, что область $V(m_\nu)$ содержится в V'. Пусть (ξ_i), (ξ_{ki}) координаты точек $m_\nu, m_{k\nu}$ и $\varphi = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = 1$ любая грань UP, проходящая через m_ν. Проведем из точки O прямую OL в полость K', сопряженную с плоскостью $\varphi = 1$. Эта прямая пройдет через центр эллипсоида $\varphi = 1$, $f = 0$, если $\varphi = 1$ эллиптическая грань; если же грань $\varphi = 1$ параболическая, то OL есть образующая конуса K, параллельная плоскости $\varphi = 1$. Возьмем точку (λ_i) на OL; тогда

$$\lambda_i = \varepsilon'\omega \cdot \frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \omega > 0).$$

Подставляя в (24) вместо координат точки x числа λ_i, получим:

$$\varepsilon f(\lambda_i, \xi_{ki}) - \varepsilon f(\lambda, \xi_i) = \varepsilon\varepsilon'\omega d \sum p_i(\xi_{ki} - \xi_i) = \omega \cdot |d| \left(\sum p_i \xi_{ki} - 1\right) \geqslant 0. \tag{25}$$

Таким образом точка $x = (\lambda_i)$ удовлетворяет неравенствам (24) для любой вершины $m_{k\nu}$ (и даже для любой точки $m_{k\nu}$ из множества $\mathfrak{M}$); при этом (25) показывает, что неравенство (24) обращается для этой точки в равенство тогда и только тогда, когда смежная вершина $m_{k\nu}$ лежит на грани $\varphi = 1$. Как известно *, положение грани $\varphi = 1$ пирамиды Π вполне определяется ребрами Π, лежащими на этой грани; следовательно, уравнения $\sum p_i(\xi_{ki} - \xi_i) = 0$ [где (ξ_{ki}) смежная с (ξ_i) вершина, лежащая на $\varphi = 1$] определяют p_i с точностью до множителя, а уравнения $\varepsilon f(\lambda_i, \xi_{ki} - \xi_i) = 0$ определяют λ_i до множителя. Итак, луч OL принадлежит V' и положение его вполне определяется проходящими через него гранями V', т. е. OL есть ребро V'.

Докажем, что других ребер, кроме указанных, пирамида V' не имеет. Возьмем любое ребро V' и на нем точку (λ_i); положив $p_i = \varepsilon \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, будем иметь для всех смежных с (ξ_i) вершин $\sum p_i(\xi_{ki} - \xi_i) \geqslant 0$, причем среди этих неравенств имеется столько равенств, что они определяют числа p_i до множителя. Пусть (μ_i) любая точка множества $\mathfrak{M}$; так как она лежит внутри или на границе Π, то

$$\mu_i - \xi_i = \rho_1(\xi_{1i} - \xi_i) + \rho_2(\xi_{2i} - \xi_i) + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots n, \text{ все } \rho \geqslant 0),$$

откуда $\sum p_i(\mu_i - \xi_i) \geqslant 0$. Положив $\sum p_i x_i = \varphi$, $\sum p_i \xi_i = \varkappa$, находим, что плоскость $\varphi = \varkappa$ обладает следующими свойствами: 1) для всех точек множества $\mathfrak{M}$ $\varphi \geqslant \varkappa$; 2) равенство $\varphi = \varkappa$ имеет место для вер-

* См. ([4]), § 10.

шины (ξ_i) и стольких смежных с нею вершин, что эти точки вполне определяют положение плоскости $\varphi = \varkappa$. Следовательно, $\varphi = \varkappa$ есть грань UP, проходящая через вершину (ξ_i). Так как для точки $(2\xi_i)$ $\varphi > \varkappa$, то $\varkappa > 0$, т. е. точка (λ_i) принадлежит полости K'. Итак, взятое ребро V' есть прямая, проходящая из точки O в полость K' и сопряженная с гранью $\varphi = \varkappa$, проходящей через (ξ_i), что мы и хотели доказать. Таким образом мы нашли все ребра пирамиды V' и все они, по замеченному выше [неравенство (25)], принадлежат области $V(m_\nu)$; следовательно, и вся пирамида V' принадлежит $V(m_\nu)$, т. е. $V(m_\nu) = V'$.

Остается доказать, что грани $V(m_\nu)$ имеют указанное в теореме значение. Для того чтобы плоскость $\varepsilon f(x_i, \xi_{ki} - \xi_i) = 0$ была фактической гранью V', необходимо и достаточно, чтобы не имело место тождественно в x_i соотношение:

$$\varepsilon f(x_i, \xi_{ki} - \xi_i) = \rho_1 \cdot \varepsilon f(x_i, \xi_{1i} - \xi_i) + \rho_2 \cdot \varepsilon f(x_i, \xi_{2i} - \xi_i) + \ldots,$$

где все $\rho \geqslant 0$, и в правой части стоят все смежные с (ξ_i) вершины (ξ_{1i}), (ξ_{2i}), ..., кроме (ξ_{ki}). Действительно, в противном случае имеем:

$$\xi_{ki} - \xi_i = \rho_1 (\xi_{1i} - \xi_i) + \rho_2 (\xi_{2i} - \xi_i) + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что невозможно, так как $\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{ki}, \ldots$ определяют различные ребра пирамиды П. Теорема доказана.

Из теоремы 10 вытекает, что всякая точка $V(m_\nu)$ принадлежит полости K'.

По доказанному в § 4, для всякой точки $\mu \neq m_\nu$ из множества $\mathfrak{M}$ имеем $\varepsilon f(m_\nu) < \varepsilon f(m_\nu, \mu)$, т. е. сама вершина m_ν лежит внутри пирамиды $V(m_\nu)$.

ТЕОРЕМА 11. *Пирамиды* $V(m_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *заполняют полость* K' *регулярно (т. е. без пропусков и не налегая друг на друга).*

Пусть точка A лежит внутри пирамиды $V(m_k)$, т. е. для всякой вершины $m_\nu \neq m_k$ имеем $\varepsilon f(A, m_k) < \varepsilon f(A, m_\nu)$; если A принадлежит другой пирамиде $V(m_l)$, то

$$\varepsilon f(A, m_l) \leqslant \varepsilon f(A, m_k) < \varepsilon f(A, m_l),$$

что невозможно; итак, пирамиды $V(m_\nu)$ друг на друга не налегают. Пусть, далее, (α_i) — точка внутри K', так что плоскость $\varepsilon f(\alpha_i, x_i) = 0$ эллиптическая. Если $k > 0$ есть минимум выражения $\varepsilon f(\alpha_i, x_i)$ для точек множества $\mathfrak{M}$, то, по лемме 2, на плоскости $\varepsilon f(\alpha_i, x_i) = k$ лежит, по крайней мере, одна вершина m_ν UP; очевидно, что (α_i) принадлежит пирамиде $V(m_\nu)$. Теорема доказана.

Легко доказать также, что всякая конечная область, лежащая целиком внутри K', покрывается конечным числом пирамид $V(m_\nu)$

и что эти пирамиды соприкасаются друг с другом целыми гранями.

§ 18

Пусть m — вершина UP и s — подстановка группы G' (§ 15); по § 15 точка $m' = ms$ будет также вершиной UP. Обозначая через A любую точку $V(m)$ и через m_ν любую вершину, имеем (лемма 4):

$$\varepsilon f(A,m) = \varepsilon f(As,m') \leqslant \varepsilon f(A,m_\nu) = \varepsilon f(As,m_\nu s),$$

т. е. As принадлежит $V(m')$. Итак, подстановка s переводит каждую точку $V(m)$ в соответствующую точку $V(ms)$. Легко доказать и обратное, именно: если m и m' — две вершины (одинаковые или различные) и точка A, лежащая внутри $V(m)$, подстановкой s переходит в точку A' пирамиды $V(m')$, то $m' = ms$. Действительно, при $m' \neq ms$ мы имели бы $m \neq m's^{-1}$ и потому

$$\varepsilon f(A,m) < \varepsilon f(A,m's^{-1}), \quad \varepsilon f(A',ms) < \varepsilon f(A',m') \leqslant \varepsilon f(A',ms),$$

что невозможно.

Пусть $G_0(m)$ есть система подстановок из G', переводящих в себя данную вершину m; по § 16 $G_0'(m)$ есть конечная группа и из только что замеченного вытекает, что внутренние точки $V(m)$ могут быть связаны друг с другом лишь подстановками $G_0'(m)$. Легко разбить пирамиду $V(m)$ на новые конечные пирамиды $V_1(m)$, $V_2(m)$, ... так, что внутренние точки $V_1(m)$ будут уже не эквивалентны. Возьмем внутри $V(m)$ точку $A = (\alpha_i)$, координаты которой не связаны зависимостью вида $k_1\alpha_1 + \ldots + k_n\alpha_n = 0$, где k_i — целые рациональные числа, не равные одновременно нулю (такие точки A можно взять сколь угодно близкими к любой точке пространства); тогда все эквивалентные A точки будут различны. Пусть $\sigma_1 = 1$, σ_2, ..., σ_p — все подстановки $G_0'(m)$ и ν — один из значков $1, 2, \ldots, p$. Присоединим к конечному числу неравенств, определяющих область $V(m)$, еще p неравенств $\varepsilon f(x,A\sigma_\nu) \leqslant \varepsilon f(x,A\sigma_\mu)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ и обозначим через $V_\nu(m)$ пирамиду, определяемую всеми этими неравенствами. Тогда: 1) пирамиды $V_1(m)$, ..., $V_p(m)$ друг на друга не налегают и заполняют без пропусков пирамиду $V(m)$; 2) пирамида $V_1(m)$ подстановкой σ_ν переходит в $V_\nu(m)$; 3) две различные точки $V_1(m)$ (из которых хоть одна лежит внутри $V_1(m)$), не эквивалентны; 4) точка A лежит внутри пирамиды $V_1(m)$, так как при $A\sigma_\mu \neq A$ и $f(A\sigma_\mu) = f(A)$ по свойству двуполого гиперболоида (конец § 3) имеем $\varepsilon f(A) < \varepsilon f(A,A\sigma_\mu)$. Замечания 1) — 3) доказываются аналогично предыдущему.

Пусть m_1, m_2, ... все неэквивалентные вершины (в конечном или бесконечном числе). Составим для каждой из них пирамиду V_1. Тогда область $V_0 = V_1(m_1) + V_1(m_2) + \ldots$ будет, на основании сказанного в этом параграфе, фундаментальной областью группы G', т. е. каждая точка внутри K' эквивалентна точке V_0 и две точки внутри V_0 не эквивалентны.

Случай целочисленной формы f

§ 19

Предположим теперь, что коэффициенты формы f суть числа целые рациональные. В этом параграфе две квадратичные формы будем называть эквивалентными, если они связаны целочисленной подстановкой определителя $+1$. Целочисленное представление числа N формою f: $f(x_1, \ldots, x_n) = N$ назовем собственным, если x_i не имеют общего делителя; наконец, два представления числа N формою f назовем эквивалентными, если они связаны целочисленным автоморфизмом f определителя $+1$.

ТЕОРЕМА 12. *Пусть N целое число знака ε, т. е. $\varepsilon N > 0$. Количество неэквивалентных собственных представлений N формою f конечно и не превышает $|N|^{n-1} h$, где h количество всех неэквивалентных целочисленных положительных форм с $n-1$ переменными определителя $|d^{n-2}N|$.*

Доказательство этой теоремы проводится по методу Гаусса ([6]). Выберем прежде всего полную систему неэквивалентных целочисленных положительных форм определителя $|d^{n-2}N|$ с $n-1$ переменными и, умножив каждую из этих форм на единицу $-\varepsilon'$, обозначим полученные формы определителя $d^{n-2}N$ через $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$. Пусть $m_{ij}^{(\alpha)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$ коэффициенты формы φ_α. Пусть, далее, каждое из чисел $M_1, \ldots, M_{n-1}$ пробегает независимо от других полную систему вычетов по $\mathrm{Mod}\,|N|$, так что получим $|N|^{n-1}$ различных систем $M_1, \ldots, M_{n-1}$. Рассмотрим квадратичную форму с матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} m_{11}^{(\alpha)} & \ldots & m_{1,n-1}^{(\alpha)} & m_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n-1,1}^{(\alpha)} & \ldots & m_{n-1,n-1}^{(\alpha)} & m_{n-1,n} \\ m_{n1} & \ldots & m_{n,n-1} & m_{nn} \end{pmatrix}$$

и подберем в ней последний столбец $m_{1n}, \ldots, m_{n-1,n}, m_{nn}$ (или строку) так, чтобы последний столбец союзной с Φ формы $\overline{\Phi}$ состоял из чисел $d^{n-2}M_1, \ldots, d^{n-2}M_{n-1}$, $d^{n-2}N$ и чтобы определитель Φ равнялся определителю формы $F(x_i)$, т. е. d^{n-1}. Так как $\det \varphi_\alpha \neq 0$, то этими условиями последний столбец Φ определяется

вполне. Комбинируя каждую из форм φ_α с каждой из систем $M_1, \ldots, M_{n-1}$ и строя для каждой комбинации форму Φ, мы получим $|N|^{n-1}h$ таких форм; удержим из этих форм Φ лишь те $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$, которые целочисленны и эквивалентны F $(0 \leqslant k \leqslant \leqslant |N|^{n-1}h)$.

Пусть S_ν подстановка определителя $+1$, при которой F переходит в Φ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ и пусть $\alpha_{\nu 1}, \ldots, \alpha_{\nu n}$ есть последний столбец союзной с S_ν матрицы $\overline{S_\nu}$ (т. е. матрицы, получаемой заменой каждого элемента S_ν его алгебраическим дополнением). Так как союзная с F форма, т. е. $d^{n-2}f$, подстановкой $\overline{S}_\nu$ переходит в $\overline{\Phi}_\nu$, то $f(\alpha_{\nu 1}, \ldots, \alpha_{\nu n}) = N$, т. е. числа $\alpha_{\nu i}$ дают собственное представление N формою f.

Докажем, что всякое собственное представление N эквивалентно одному из этих k представлений $\alpha_{\nu i}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$.

Пусть (β_i) собственное представление: $f(\beta_i) = N$; легко видеть, что существует целочисленная матрица Σ определителя $+1$ с последним столбцом $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Преобразуем $F(x_i)$ в эквивалентную $\Psi(y_i)$ подстановкой $\overline{\Sigma} = (s_{ij})$; так как $\sum_{i=1}^{n} s_{ij}\beta_i = 0$ $(j = = 1, 2, \ldots, n-1)$ и $\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n = 0$ есть плоскость эллиптического направления для конуса $F = 0$, то форма с $n-1$ переменными

$$-\varepsilon'\psi = -\varepsilon'\Psi(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) = -\varepsilon' F(s_{11}y_1 + + \ldots + s_{1,n-1}y_{n-1}, \ldots, s_{n1}y_1 + \ldots + s_{n,n-1}y_{n-1})$$

положительна; далее, так как форма $F = d^{n-2}f$ подстановкой $\overline{\overline{\Sigma}} = = \Sigma$ переходит в союзную $\overline{\Psi}$, то определитель формы ψ равен $d^{n-2}f(\beta_i) = d^{n-2}N$. Таким образом ψ эквивалентна одной из форм $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$; пусть ψ переходит в φ_α подстановкой (t_{ij}) $(i, j = = 1, 2, \ldots, n-1)$ определителя $+1$. Тогда можно сказать, что подстановка

$$\overline{\Sigma}T = \overline{\Sigma}\begin{Bmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n-1,1} & \ldots & t_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

переводит F в такую форму $\Psi_1(y_1, \ldots, y_n)$, для которой $\Psi_1(y_1, \ldots \ldots y_{n-1}, 0) = \varphi_\alpha$. Преобразуем, далее, форму Ψ_1 подстановкой вида:

$$L = \begin{Bmatrix} 1 & \ldots & 0 & l_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & l_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

От такого преобразования изменится только последний столбец (и строка) матрицы, соответствующей Ψ_1. Союзная форма $\overline{\Psi_1}$ преобразуется подстановкой

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} 1 \dots & 0 & 0 \\ \dots\dots & \cdot & \cdot \\ 0 \dots & 1 & 0 \\ -l_1 \dots & -l_{n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому, если элементы последнего столбца $\overline{\Psi}_1$ были $d^{n-2}\mu_1 \dots$, $d^{n-2}\mu_{n-1}, d^{n-2}N$, то после преобразования величины μ_i заменяются следующими: $\mu_i - l_i N$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$. Следовательно, надлежащим выбором целых чисел l_i можно добиться того, что система $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ совпадает с одною из указанных выше систем $M_1, \dots, M_{n-1}$. При таком выборе матрицы L можно сказать, что форма F преобразуется подстановкой $\bar{\Sigma}TL$ определителя $+1$ в такую форму $\Omega(y_i)$, у которой $\Omega(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) = \varphi_\alpha$, и последний столбец матрицы $\overline{\Omega}$ есть $d^{n-2}M_1, \dots, d^{n-2}M_{n-1}, d^{n-2}N$; поэтому Ω совпадает с одной из форм Φ_ν и $\bar{\Sigma}TL = US_\nu$, где U—целочисленный автоморфизм F определителя $+1$. Переходя к союзным матрицам $\Sigma\overline{T}\overline{L} = \overline{U}\bar{\overline{S}}_\nu$ и сравнивая здесь последние столбцы, найдем, что представление (β_i) связано с представлением $(\alpha_{\nu i})$ целочисленным автоморфизмом $\overline{U}$ формы f. Теорема доказана.

§ 20

Из теорем 3 и 12 вытекает, что при целочисленной f существует лишь конечное число неэквивалентных (в прежнем смысле, см. введение) вершин UP; а так как количество всех вершин бесконечно (§ 14), то, следовательно, группа G' (§ 15) в этом случае **бесконечна**, фундаментальная же область группы G', как это видно из сказанного в конце § 18, состоит в этом случае из конечного числа линейных пирамид, каждая из которых имеет конечное число граней.

Научно-исслед. институт математики
и механики
Ленинградского гос. университета.

Поступило
10.XII.1936.

ЛИТЕРАТУРА

1 Klein F., Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie (lithogr.), I, Göttingen, 1896 (S. 103).
2 Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Leipzig und Berlin, 1910 (§ 30).
3 Voronoi G., Recherches sur les parallèloèdres primitifs, Section I, Crellé Journal, Bd. **134,** 1908.
4 Voronoi G., Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites, Crellé Journal, Bd. **133,** 1908.
5 Minkowski H., Zur Theorie der positiven quadratischen Formen, Ges. Abhandlungen, Bd. I, p. 215, 1911.
6 Gauss C. F., Disquisitiones arithmeticae, artt. 280—283.

B. A. WENKOFF. ÜBER DIE ARITHMETISCHE AUTOMORPHISMEN-GRUPPE EINER INDEFINITEN QUADRATISCHEN FORM

ZUSAMMENFASSUNG

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist Aufstellung des Fundamentalbereiches der Gruppe G der ganzzahligen Automorphismen einer gegebenen indefiniten quadratischen Form $f(x_1, \ldots, x_n)$, deren Determinante $d \neq 0$ und deren Zerlegung in Quadrate die Form (3) hat. Die Methode ist eine Verallgemeinerung des Klein'schen Polygons. Es sei K der Kegel $f = 0$ und $\mathfrak{M}$ die Punktmenge mit ganzzahligen Koordinaten, die in K liegen. Indem wir voraussetzen, dass die Punkte $\mathfrak{M}$ fest sind und der Kegel K aus irgend welchem Material verfertigt ist, wollen wir ihn über die Punkte $\mathfrak{M}$ ziehen; dann bildet das Material einen Polyeder (Umrisspolyeder $= UP$). Der Verfasser beweist die drei folgende Sätze über diese Polyeder: 1) Ungleichung (9) für den Wert von f in der Spitze UP, 2) dass durch jede Spitze eine endliche Anzahl von Seiten geht, 3) es sei (4) die bilineare Form, welche der gegebenen quadratischen Form (1) entspricht, $m_1, m_2, \ldots$ alle Spitzen von UP und m eine von ihnen; das Bereich $V(m)$, welches durch die unendliche Zahl von Ungleichungen (23) definiert ist, ist eine Pyramide mit einer endlichen Anzahl von Seiten. Hier ermöglichen die Pyramiden $V(m)$ den gesuchten Fundamentalbereich der Gruppe G aufzubauen.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

В. Л. ГОНЧАРОВ

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЕННОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе введено понятие порядка и типа функции вблизи изолированной особенной точки, а также понятие порядка и типа сходимости последовательности точек. Установлена зависимость между порядком и типом скорости сходимости точек интерполяции к особенным точкам и порядком и типом функции вблизи этих точек, достаточная для сходимости процесса интерполяции при том условии, что у функции имеется лишь конечное число особенных точек.

Если интерполируемая функция имеет только одну особенную точку, обыкновенно представляют ее помещенной в бесконечности, т. е. предполагают функцию целой; интерполирование производится с помощью полиномов, т. е. рациональных функций с полюсами в бесконечности; что касается точек интерполирования, то наибольший интерес представляет тот случай, когда они имеют бесконечность в качестве единственной точки сгущения. Обозрение важнейших результатов, полученных при таких предположениях, можно найти в моей статье в «Успехах математических наук», т. 3, 1936 г.

Мы рассмотрим здесь более общую задачу: будем предполагать, что интерполируемая функция имеет несколько—конечное число—особенностей, что интерполирование производится с помощью рациональных функций, полюсы которых совпадают с особенностями интерполируемой функции, и что точки интерполирования сгущаются только около этих особенностей. Сделав такие допущения, выведем достаточные условия сходимости интерполяционного процесса—при неограниченно возрастающей степени рациональной функции, посредством которой производится интерполирование.

* * *

Пусть интерполируемая функция $f(z)$ регулярна во всей плоскости (не исключая точки $z = \infty$), кроме точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ $(p > 1)$. Если точки a_m $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$ различны между собою и отличны

от названных особенностей функции $f(z)$, то существует одна и только одна рациональная функция степени n и вида:

$$f_n(z) = \frac{P_n(z)}{(z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots(z-\alpha_p)^{\mu_p}} \qquad (1)$$

$\Big(P_n(z)$ — полином степени n, μ_ν — целые неотрицательные числа, $\sum\limits_{\nu=1}^{p}\mu_\nu = n\Big)$, удовлетворяющая условиям:

$$f_n(a_m) = f(a_m) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

Разность $f(z) - f_n(z)$, т. е. остаточный член интерполяции, может быть представлена в виде интеграла:

$$I \equiv I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\cdot\frac{(\zeta-\alpha_1)^{\mu_1}(\zeta-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots(\zeta-\alpha_p)^{\mu_p}}{(z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots(z-\alpha_p)^{\mu_p}}\cdot\frac{\Pi_n(z)}{\Pi_n(\zeta)}\,d\zeta, \qquad (3)$$

где положено

$$\Pi_n(z) = \prod_{m=0}^{n}(z - a_m),$$

и замкнутый контур (C) охватывает точку z и все точки a_m $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$ и не охватывает ни одной из точек α_ν. В самом деле, этот интеграл равен сумме вычетов подинтегральной функции (как функции переменной ζ) относительно полюсов z и a_m $(0 \leqslant m \leqslant n)$; но вычет относительно полюса z равен $f(z)$, а сумма вычетов относительно полюсов a_m имеет такой же вид, как и правая часть формулы (1), и, кроме того, очевидно,

$$I(a_m) = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

откуда и следует заключение.

Заметим теперь, что подинтегральная функция (как функция ζ) представляется в виде произведения двух множителей, из которых первый $f(\zeta)$ есть функция регулярная в бесконечности, а второй—рациональная функция, у которой степень знаменателя на две единицы превосходит степень числителя; это обстоятельство позволяет заменить контур (C) контуром (Γ), также замкнутым, охватывающим точки α_ν $(1 \leqslant \nu \leqslant p)$ и не охватывающим точек z и a_m $(0 \leqslant m \leqslant n)$, но проходимым в обратном направлении, и дальше—написать:

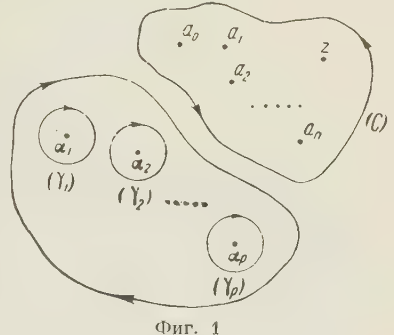
$$I = \sum_{\nu=1}^{p} I_\nu,$$

где I_ν—интегралы с той же подинтегральной функцией, что и интеграл I, но взятые в обратном направлении по замкнутым контурам (γ_ν), охватывающим точку α_ν и не охватывающим ни одной из точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_p, z, a_0, a_1, \ldots, a_n$. В ка-

честве контуров (γ_ν) можно взять, например, круги с центрами в точках α_ν и достаточно малых радиусов (см. фиг. 1).

Перейдем теперь к рассмотрению бесконечного интерполяционного процесса.

Допустим, что вместо конечного числа точек интерполирования a_m задано счетное множество точек, не имеющих иных точек сгущения (не исключая бесконечности), кроме α_ν $(\nu=1,2,\dots,p)$. Такое множество можно разбить на p последовательностей (S_ν), из которых каждая имеет пределом одну из точек α_ν:



Фиг. 1

$$(S_\nu) \qquad a_1^{(\nu)} a_2^{(\nu)}, \dots, a_n^{(\nu)}, \dots, \lim a_n^{(\nu)} = \alpha_\nu \;\; (\nu = 1, 2, \dots, p).$$

Чтобы не осложнять изложения излишними подробностями, допустим, что расстояния точек $a_n^{(\nu)}$ от предельной α_ν образуют убывающую последовательность:

$$|a_1^{(\nu)} - \alpha_\nu| > |a_2^{(\nu)} - \alpha_\nu| > \dots > |a_n^{(\nu)} - \alpha_\nu| > \dots \quad (\nu = 1, 2, \dots, p).$$

Предположим, что n-ая интерполяционная функция $f_n(z)$ вида

$$f_n(z) = \frac{P_n(z)}{(z-\alpha_1)^{\mu_n^{(1)}} (z-\alpha_2)^{\mu_n^{(2)}} \dots (z-\alpha_p)^{\mu_n^{(p)}}}$$

($P_n(z)$—полином степени n, $\mu_n^{(\nu)}$—целые неотрицательные числа, $\sum_{\nu=1}^{p} \mu_n^{(\nu)} = n$) определяется условиями:

$$f_n(a_m^{(\nu)}) = f(a_m^{(\nu)}) \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(\nu)} \\ \lambda = 1, 2, \dots, p \end{pmatrix}, \tag{4}$$

причем должно быть выполнено соотношение:

$$\sum_{\nu=1}^{p} \lambda_n^{(\nu)} = n + 1. \tag{5}$$

Согласно изложенному выше, остаточный член $I_n \equiv f(z) - f_n(z)$ в n-ой интерполяции может быть написан в виде суммы p интегралов:

$$I_n = \sum_{\nu=1}^{p} I_n^{(\nu)},$$

где положено

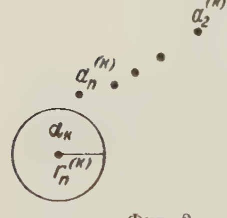
$$I_n^{(\nu)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\gamma_n^{(\nu)})} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\cdot\frac{(\zeta-\alpha_1)^{\mu_n^{(1)}}(\zeta-\alpha_2)^{\mu_n^{(2)}}\ldots(\zeta-\alpha_p)^{\mu_n^{(p)}}}{(z-\alpha_1)^{\mu_n^{(1)}}(z-\alpha_2)^{\mu_n^{(2)}}\ldots(z-\alpha_p)^{\mu_n^{(p)}}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\Pi^{(1)}_{\lambda_n^{(1)}}(z)\cdot\Pi^{(2)}_{\lambda_n^{(2)}}(z)\ldots\Pi^{(p)}_{\lambda_n^{(p)}}(z)}{\Pi^{(1)}_{\lambda_n^{(1)}}(\zeta)\cdot\Pi^{(2)}_{\lambda_n^{(2)}}(\zeta)\ldots\Pi^{(p)}_{\lambda_n^{(p)}}(\zeta)}\,d\zeta,$$

$$\Pi_k^{(\nu)}(z) = \prod_{m=0}^{k}(z - a_m^{(\nu)})$$

и $(\gamma_n^{(\nu)})$—проходимый в обратном направлении круг с центром α_ν и радиусом $r_n^{(\nu)}$ $(r_n^{(\nu)} < |a_n^{(\nu)} - \alpha_\nu|)$ (фиг. 2).

Нам предстоит выяснить, при каких условиях можно утверждать, что если $n \to \infty$, то $f_n(z)$ стремится к данной функции $f(z)$; для этого достаточно, чтобы каждый из интегралов $I_n^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ стремился к нулю.



Фиг. 2

Предположим, что z находится в области (T), определяемой неравенствами

$$|z - \alpha_\nu| > \eta \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p) \quad |z| < R, \tag{6}$$

где η—как угодно малое, R—как угодно большое положительное число.

Сосредоточим наше внимание на оценке интеграла $I_n^{(k)}$. Мы получаем:

$$|I_n^{(k)}| < \frac{r_n^{(k)}}{|z-\alpha_k| - r_n^{(k)}}\cdot\left|\frac{\Pi^{(1)}_{\lambda_n^{(1)}}(z)\ldots\Pi^{(p)}_{\lambda_n^{(p)}}(z)}{(z-\alpha_1)^{\mu_n^{(1)}}\ldots(z-\alpha_p)^{\mu_n^{(p)}}}\right|\cdot$$

$$\cdot\max_{\gamma_n^{(k)}}\left|\frac{(\zeta-\alpha_1)^{\mu_n^{(1)}}\ldots(\zeta-\alpha_p)^{\mu_n^{(p)}}}{\Pi^{(1)}_{\lambda_n^{(1)}}(\zeta)\ldots\Pi^{(p)}_{\lambda_n^{(p)}}(\zeta)}\right|\cdot\max_{\gamma_n^{(k)}}|f(\zeta)|$$

и дальше, принимая во внимание, что при достаточно больших n

$$\frac{r_n^{(k)}}{|z-\alpha_k| - r_n^{(k)}} < \frac{r_n^{(k)}}{\eta - r_n^{(k)}} < 1,$$

будем иметь:

$$\lg|I_n^{(k)}| < \sum_{\nu=1}^{p}\lg\left|\frac{\Pi^{(\nu)}_{\lambda_n^{(\nu)}}(z)}{(z-\alpha_\nu)^{\lambda_n^{(\nu)}}}\right| + \sum_{\nu=1}^{p}(\lambda_n^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)})\lg|z-\alpha_\nu| +$$

$$+\max_{\gamma_n^{(k)}}\left\{\sum_{\nu=1}^{p}\lg\left|\frac{(\zeta-\alpha_\nu)^{\lambda_n^{(\nu)}}}{\Pi^{(\nu)}_{\lambda_n^{(\nu)}}(\zeta)}\right| - \sum_{\nu=1}^{p}(\lambda_n^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)})\cdot\lg|\zeta-\alpha_\nu|\right\} +$$

$$+\max_{\gamma_n^{(k)}}\lg|f(\zeta)|.$$

Но

$$\left|\frac{z-a_m^{(\nu)}}{z-\alpha_\nu}\right| = \left|1-\frac{a_m^{(\nu)}-\alpha_\nu}{z-\alpha_\nu}\right| < 1+\left|\frac{a_m^{(\nu)}-\alpha_\nu}{z-\alpha_\nu}\right| < 1+\frac{|a_m^{(\nu)}-\alpha_\nu|}{\eta},$$

так что при $m\to\infty$

$$\lg\left|\frac{z-a_m^{(\nu)}}{z-\alpha_\nu}\right| = o(1)$$

и, следовательно, при $n\to\infty$

$$\lg\left|\frac{\Pi_{\lambda_n^{(\nu)}}^{(\nu)}(z)}{(z-\alpha_\nu)^{\lambda_n^{(\nu)}}}\right| = \sum_{m=1}^{\lambda_n^{(\nu)}}\lg\left|\frac{z-a_m^{(\nu)}}{z-\alpha_\nu}\right| = o(\lambda_n^{(\nu)}) = o(n) \qquad (1\leqslant\nu\leqslant p).$$

Так как при $\nu\neq k$ и достаточно больших n

$$|\zeta-\alpha_\nu| \geqslant |\alpha_\nu-\alpha_k| - |\zeta-\alpha_k| = |\alpha_\nu-\alpha_k| - r_n^{(k)} > \eta,$$

о, подобно предыдущему,

$$\lg\left|\frac{\Pi_{\lambda_n^{(\nu)}}^{(\nu)}(\zeta)}{(\zeta-\alpha_\nu)^{\lambda_n^{(\nu)}}}\right| = o(n).$$

Заметив еще, что вследствие допущений (6)

$$(\lambda_n^{(\nu)}-\mu_n^{(\nu)})\lg|z-\alpha_\nu| = O(\lambda_n^{(\nu)}-\mu_n^{(\nu)}) \quad (1\leqslant\nu\leqslant p),$$
$$(\lambda_n^{(\nu)}-\mu_n^{(\nu)})\lg|\zeta-\alpha_\nu| = O(\lambda_n^{(\nu)}-\mu_n^{(\nu)}) \quad (1\leqslant\nu\leqslant p,\ \nu\neq k),$$

придадим нашему неравенству вид:

$$\lg|I_n^{(k)}| < \max_{\gamma_n^{(k)}}\lg|f(\zeta)| + \max_{\gamma_n^{(k)}}\lg\left|\frac{(\zeta-\alpha_k)^{\lambda_n^{(k)}}}{\Pi_{\lambda_n^{(k)}}^{(k)}(\zeta)}\right| -$$
$$-(\lambda_n^{(k)}-\mu_n^{(k)})\lg r_n^{(k)} + o(n) + \sum_{\nu=1}^{p} O(\lambda_n^{(\nu)}-\mu_n^{(\nu)}). \qquad (7)$$

Это последнее соотношение установлено при допущении условий (6); однако ограничение $|z|<R$ можно отбросить: чтобы убедиться в этом, достаточно произвести в интеграле $I_n^{(k)}$ замену $z=c+\frac{1}{z}$, $\zeta=c+\frac{1}{\zeta}$, подобрав надлежащим образом c.

Сделаем теперь дальнейшее предположение, касающееся поведения функции $f(z)$ в окрестности точек α_ν и относительно расположения точек интерполирования $a_n^{(\nu)}$. Именно, допустим, что в окрестности точек α_ν, т. е. при достаточно малых значениях $|z-\alpha_\nu|$ имеют место неравенства:

$$|f(z)| < e^{\frac{H_\nu}{|z-\alpha_\nu|^{\sigma_\nu}}}, \qquad (8)$$

где H_ν и σ_ν—некоторые положительные числа; с другой стороны, пусть при достаточно больших значениях n выполняются также неравенства:

$$\left| \frac{1}{a_n^{(\nu)} - \alpha_\nu} \right| \leqslant L_\nu n^{\frac{1}{\theta_\nu}}, \tag{9}$$

где L_ν и θ_ν—положительные числа.

Допустим, далее, что числа $\lambda_n^{(\nu)}$ связаны предельными соотношениями:

$$\lambda_n^{(\nu)} \sim \varkappa_\nu n, \text{ т. е. } \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(\nu)}}{n} = \varkappa_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p), \tag{10}$$

где

$$\varkappa_\nu > 0, \quad \sum_{\nu=1}^{p} \varkappa_\nu = 1.$$

Так как выбор радиуса $r_n^{(\nu)}$ круга $(\gamma_n^{(\nu)})$ подчинен единственному ограничению $r_n^{(\nu)} < |a_n^{(\nu)} - \alpha_\nu|$, то мы можем положить

$$r_n^{(\nu)} = \frac{1}{\tau_\nu L_\nu n^{\frac{1}{\theta_\nu}}},$$

причем τ_ν—пока произвольные числа, большие единицы.

В таком случае получим оценку:

$$\lg \left| \frac{(\zeta - \alpha_k)^{\lambda_n^{(k)}}}{\Pi_{\lambda_n^{(k)}}^{(k)}(\zeta)} \right| = \sum_{m=1}^{\lambda_n^{(k)}} \lg \left| \frac{\zeta - \alpha_k}{\zeta - a_m^{(k)}} \right| \leqslant \sum_{m=1}^{\lambda_n^{(k)}} \lg \frac{\left| \frac{1}{a_m^{(k)} - \alpha_k} \right|}{\left| \frac{1}{\zeta - \alpha_k} \right| - \left| \frac{1}{a_m^{(k)} - \alpha_k} \right|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\lambda_n^{(k)}} \lg \frac{m^{\frac{1}{\theta_k}}}{\tau_k n^{\frac{1}{\theta_k}} - m^{\frac{1}{\theta_k}}} \sim n \int_0^{\varkappa_k} \lg \frac{x^{\frac{1}{\theta_k}}}{\tau_k - x^{\frac{1}{\theta_k}}} \, dx = -n\tau_k^{\theta_k} h_{\theta_k}(\tau_k \varkappa_k^{-\frac{1}{\theta_k}}), \tag{11}$$

где положено для сокращения

$$h_\theta(u) = \theta \int_u^\infty \lg(t-1) \frac{dt}{t^{1+\theta}} \quad (\theta > 0, \ u > 1). \tag{12}$$

Пользуясь неравенствами (8) и (11), придадим теперь оценке (7) вид:

$$\lg |I_n^{(k)}| < -n\tau_k^{\theta_k} h_{\theta_k}(\tau_k \varkappa_k^{-\frac{1}{\theta_k}}) + n^{\frac{\sigma_k}{\theta_k}} H_k (\tau_k L_k)^{\sigma_k} +$$

$$+ (\lambda_n^{(k)} - \mu_n^{(k)}) \frac{\lg n}{\theta_k} + o(n) + \sum_{\nu=1}^{p} O(\lambda_n^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)}). \tag{13}$$

Из этого основного неравенства мы выведем в дальнейшем ряд следствий, касающихся сходимости рассматриваемого процесса.

Введем понятия порядка и типа функции $f(z)$ около особенной точки $z=\alpha_\nu$; именно, будем называть **порядком** и **типом** $f(z)$ около точки $z=\alpha_\nu$ соответственно числа ρ_ν и A_ν, определяемые соотношениями:

$$\overline{\lim_{z\to\alpha_\nu}}\frac{\lg\lg|f(z)|}{\lg\left|\frac{1}{z-\alpha_\nu}\right|}=\rho_\nu \qquad (\rho_\nu\geqslant 0),$$

$$\overline{\lim_{z\to\alpha_\nu}}|z-\alpha_\nu|^{\rho_\nu}\lg|f(z)|=A_\nu \qquad (\rho_\nu>0,\ A_\nu\geqslant 0)$$

(причем предполагается, что верхние пределы берутся относительно всевозможных путей, ведущих в точку α_ν). Неравенство

$$|f(z)|<e^{\left|\frac{1}{z-\alpha_\nu}\right|^{\rho_\nu+\varepsilon}},$$

будучи выполнено для сколь угодно малого ε, лишь бы z было достаточно близко к α_ν, свидетельствует о том, что функция $f(z)$ — порядка меньшего, чем ρ_ν, или равного ρ_ν; аналогичным образом неравенство

$$|f(z)|<e^{(A_\nu+\varepsilon)\left|\frac{1}{z-\alpha_\nu}\right|^{\rho_\nu}}$$

свидетельствует о том, что порядок $f(z)$ меньше ρ_ν, или что порядок равен ρ_ν, а тип меньше, чем A_ν, или равен A_ν.

Затем введем еще числа ρ'_ν и ω_ν (которые можно было бы назвать **порядком и типом сходимости точек интерполирования около точки** α_ν):

$$\frac{1}{\rho'_\nu}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lg\left|\frac{1}{a_n^{(\nu)}-\alpha_\nu}\right|}{\lg n},$$

$$\omega_\nu=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n^{\frac{1}{\rho'_\nu}}|a_n^{(\nu)}-\alpha_\nu|}.$$

Неравенство

$$\frac{1}{|a_n^{(\nu)}-\alpha_\nu|}<n^{\frac{1}{\rho'_\nu-\varepsilon}},$$

будучи выполнено для сколь угодно малого ε, лишь бы n было достаточно велико, свидетельствует о том, что порядок сходимости точек интерполяции около α_ν не превышает ρ'_ν; неравенство

$$\frac{1}{|a_n^{(\nu)}-\alpha_\nu|}<(\omega_\nu+\varepsilon)\,n^{\frac{1}{\rho'_\nu}}$$

— о том, что порядок меньше ρ'_ν или, если он равен ρ'_ν, то тип не превышает ω_ν.

Предположим сначала, что известны порядки возрастания ρ_ν интерполируемой функции и порядки сходимости ρ'_ν точек интерполирования около особенных точек α_ν; но неизвестно ничего о типах. В таком случае можно положить:

$$\left.\begin{matrix} H_\nu = 1 & \sigma_\nu = \rho_\nu + \varepsilon \\ L_\nu = 1 & \theta_\nu = \rho'_\nu - \varepsilon \end{matrix}\right\} \qquad (\varepsilon > 0),$$

и неравенство (7) примет вид:

$$\lg |I_n^{(k)}| < -nQ(\rho'_k - \varepsilon, \tau_k, \varkappa_k) + n^{\frac{\rho_k+\varepsilon}{\rho'_k-\varepsilon}} \tau_k^{\rho_k+\varepsilon} +$$
$$+ (\lambda_n^{(k)} - \mu_n^{(k)}) \frac{\lg n}{\rho'_k - \varepsilon} + o(n) + \sum_{\nu=1}^{p} O(\lambda_n^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)}), \tag{14}$$

где положено

$$Q(\theta, \tau, \varkappa) = \tau^\theta h_\theta(\tau \varkappa^{-\frac{1}{\theta}}) > 0.$$

Пусть $\mu_n^{(\nu)} = \lambda_n^{(\nu)}$, т. е. кратности полюсов функций $f_n(z)$ выбираются равными числу связанных с ними точек интерполирования. Тогда сходимость обеспечивается неравенствами:

$$\rho'_k > \rho_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{15}$$

так как при выполнении их ε можно подобрать настолько малым, что $\frac{\rho_k + \varepsilon}{\rho'_k - \varepsilon} < 1$, и тогда правая часть (14) стремится к $-\infty$ и, следовательно, все интегралы $I_n^{(k)}$ стремятся к нулю.

Впрочем, из того же соотношения (14) видно, что $\mu_n^{(k)}$ может и не равняться $\lambda_n^{(k)}$.

Именно, мы получаем следующее утверждение: *сходимость рассматриваемого интерполяционного процесса имеет место* (*равномерно относительно переменной z во всякой замкнутой области, не содержащей особенных точек интерполируемой функции*), *если только около каждой особенности порядок возрастания функции меньше, чем порядок сходимости точек интерполяции* [соотношение (15)]. При этом достаточно предположить, что кратности полюсов интерполирующих функций $\mu_n^{(k)}$ подчинены условиям:

(A) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n^{(k)} - \lambda_n^{(k)}}{n} = 0, \text{ т. е. } \mu_n^{(k)} \sim \varkappa_k n \quad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

(B) $$\mu_n^{(k)} > \lambda_n^{(k)} - q_k \cdot \frac{n}{\lg n} \quad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

где числа q_k удовлетворяют неравенствам:

$$q_k < \rho'_k \max_{\tau_k \geqslant 1} Q(\rho'_k, \tau_k, \varkappa_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Действительно, из этих неравенств следует, что при надлежащем выборе τ_k и ε

$$q_k < (\rho'_k - \varepsilon)[Q(\rho'_k - \varepsilon, \tau_k, \varkappa_k) - \varepsilon]$$

и потому

$$(\lambda_n^{(k)} - \mu_n^{(k)}) \frac{\lg n}{\rho_k' - \varepsilon} < [Q(\rho_k' - \varepsilon, \tau_k, \varkappa_k) - \varepsilon] n,$$

а затем остается сослаться на неравенство (14).

Предположим теперь, что порядки возрастания функции и порядки сходимости точек интерполирования около каждой особенной точки совпадают:

$$\rho_k' = \rho_k \quad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

и что известны, кроме того, типы возрастания функции A_k и типы сходимости точек интерполирования ω_k. В таком случае положим:

$$\sigma_\nu = \theta_\nu = \rho_\nu, \quad H_\nu = A_\nu + \varepsilon, \quad L_\nu = \omega_\nu + \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p),$$

и неравенство (7) примет вид:

$$\lg |I_n^{(k)}| < -\tau_k^{\rho_k} n [h_{\rho_k}(\tau_k \varkappa_k^{-\frac{1}{\rho_k}}) - (A_k + \varepsilon)(\omega_k + \varepsilon)^{\rho_k}] +$$
$$+ (\lambda_n^{(k)} - \mu_n^{(k)}) \frac{\lg n}{\rho_k} + o(n) + \sum_{\nu=1}^{p} O(\lambda_n^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)}). \tag{16}$$

Пусть $\mu_n^{(\nu)} = \lambda_n^{(\nu)}$. Тогда для сходимости достаточно потребовать выполнения неравенств:

$$A_k < \omega_k^{-\rho_k} h_{\rho_k}(\tau_k \varkappa_k^{-\frac{1}{\rho_k}}) \quad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{17}$$

Здесь числа τ_k остаются еще неопределенными, и их выгодно подобрать таким образом, чтобы правая часть (17) была возможно больше. Если $\varkappa_k > 2^{-\rho_k}$, то можно положить $\tau_k = 2\varkappa_k^{\frac{1}{\rho_k}}$, и тогда будем иметь:

$$h_{\rho_k}(\tau_k \varkappa_k^{-\frac{1}{\rho_k}}) = h_{\rho_k}(2);$$

если же $\varkappa_k < 2^{-\rho_k}$, то, выбирая τ_k достаточно близким к единице, сделаем $h_{\rho_k}(\tau_k \varkappa_k^{-\frac{1}{\rho_k}})$ как угодно близким к $h_{\rho_k}(\varkappa_k^{-\frac{1}{\rho_k}})$.

Итак, *для сходимости процесса в рассматриваемом случае достаточно, чтобы имели место неравенства:*

$$A_k < B_k, \tag{18}$$

где

$$B_k = \begin{cases} \omega_k^{-\rho_k} h_{\rho_k}(2) & \text{при } \varkappa_k \geqslant 2^{-\rho_k} \\ \omega_k^{-\rho_k} h_{\rho_k}(\varkappa_k^{-\frac{1}{\rho_k}}) & \text{при } \varkappa_k \leqslant 2^{-\rho_k} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

В частности, этот последний результат справедлив и для случая $p=1$, когда имеется только одна особенная точка $\alpha_1=\alpha$, и тогда, так как $\varkappa=\varkappa_1=1$, мы получаем единственное условие:

$$A < B = \omega^{-\rho} h_\rho (2)^{*}. \tag{19}$$

Как вытекает из предыдущего изложения, если кратности полюсов функций равны числу связанных с ним точек интерполирования, имеется столько условий сходимости, сколько допущено особенных точек, причем эти условия являются взаимно независимыми в том смысле, что условие, относящееся к каждой особенной точке, сопоставляет рост интерполируемой функции около этой точки с плотностью точек интерполирования в окрестности этой же точки.

Однако, если отказаться от требования $\mu_n^{(\nu)}=\lambda_n^{(\nu)}$, то можно получить и несколько более общие условия сходимости. Заметим прежде всего, что, если допустим

$$\lambda_n^{(k)} - \mu_n^{(k)} = o\left(\frac{n}{\lg n}\right),$$

то, как ясно из соотношения (16), ничто существенно не изменяется в наших утверждениях. Предположим теперь, что

$$\lambda_n^{(k)} - \mu_n^{(k)} = O\left(\frac{n}{\lg n}\right). \tag{20}$$

Тогда неравенству (16) можно придать вид:

$$\lg |I_n^{(k)}| < -\frac{n}{\rho_k}\left\{\rho_k \tau_k^{\rho_k}\left[h_{\rho_k}\left(\tau_k \varkappa_k^{-\frac{1}{\rho_k}}\right) - (A_k+\varepsilon)(\omega_k+\varepsilon)^{\rho_k}\right] - \right.$$
$$\left. - (\lambda_n^{(k)} - \mu_n^{(k)}) \frac{\lg n}{n}\right\} + o(n).$$

Отсюда ясно, что *если выполнены условия*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\lambda_n^{(k)} - \mu_n^{(k)}) \frac{\lg n}{n} < \Delta_k, \tag{21}$$

где положено

$$\Delta_k = \rho_k \max_{\tau_k \geqslant 1} \tau_k^{\rho_k}\left[h_{\rho_k}\left(\tau_k \varkappa_k^{-\frac{1}{\rho_k}}\right) - A_k \omega_k^{\rho_k}\right] \quad (k=1, 2, \ldots, p),$$

то сходимость должна иметь место.

Возникает вопрос: считая заданными функцию $f(z)$ и систему точек интерполирования $a_m^{(\nu)}$, при каких условиях можно распорядиться знаменателями интерполяционных функций $f_n(z)$ (т. е. подобрать числа $\mu_n^{(\nu)}$) таким образом, чтобы рассматриваемый нами процесс был сходящимся? Если выполнены неравенства $\Delta_\nu > 0$,

---

* В предположении, что точка α бесконечно удаленная, это неравенство было установлено А. О. Гельфондом [Rend. Lincei (6) **11**, p. 377—381 (1930)]. Константа, стоящая в правой части (19), не может быть увеличена.

равносильные неравенствам (17), то, как мы видели, достаточно взять $\mu_n^{(\nu)} = \lambda_n^{(\nu)}$ или вообще

$$\mu_n^{(\nu)} - \lambda_n^{(\nu)} = o\left(\frac{n}{\lg n}\right).$$

Но любопытно, что тот же результат может быть достигнут и при более общих предположениях, а именно *достаточно потребовать выполнения условия:*

$$\sum_{\nu=1}^{p} \Delta_\nu > 0. \tag{22}$$

В самом деле, обозначив через $\overline{\Delta}$ среднее арифметическое чисел Δ_ν:

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{p} \Delta_\nu,$$

можно, очевидно, всегда подобрать целые числа $\mu_n^{(\nu)}$, сумма которых равнялась бы n, таким образом, чтобы иметь:

$$\mu_n^{(\nu)} = \lambda_n^{(\nu)} + (\overline{\Delta} - \Delta_\nu)\frac{n}{\lg n} + o\left(\frac{n}{\lg n}\right)^*,$$

тогда

$$\frac{\lambda_n^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)}}{n}\lg n = \Delta_\nu - \overline{\Delta} + o(1),$$

так что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)}}{n}\lg n = \Delta_\nu - \overline{\Delta} < \Delta_\nu,$$

и условия (20) и (21) выполнены.

С другой стороны, если удовлетворены условия сходимости (21), то мы получаем:

$$0 < \sum_{\nu=1}^{p} \frac{\lambda_n^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)}}{n}\lg n = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=1}^{p} \frac{\lambda_n^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)}}{n}\lg n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{p} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)}}{n}\lg n < \sum_{\nu=1}^{p}\Delta_\nu,$$

откуда следует неравенство (22). Таким образом *неравенство (22) является необходимым и достаточным для того, чтобы посредством надлежащего выбора чисел $\mu_n^{(\nu)}$ могли быть обеспечены условия сходимости (20) и (21).*

---

* Так как числа $\overline{\mu}_n^{(\nu)} = \Delta_n^{(\nu)} + (\overline{\Delta} - \Delta_\nu)\frac{n}{\lg n}$ удовлетворяют требованию $\sum_{\nu=1}^{p} \overline{\mu}_n^{(\nu)} = n$, то можно выбрать $\mu_n^{(\nu)}$ даже таким образом, чтобы $\mu_n^{(\nu)} = \overline{\mu}_n^{(\nu)} + \theta_n^{(\nu)}$, где $|\theta_n^{(\nu)}| < 1$.

Рассмотрим конкретный пример, когда интерполируемая функция $f(z)$ имеет особенные точки α и β, причем около точки α она—порядка 1 и типа A, а около точки β—порядка 1 и типа B, так что в окрестностях этих точек соблюдаются соответственно неравенства:

$$|f(z)| < e^{\frac{A+\varepsilon}{|z-\alpha|}} \quad \text{и} \quad |f(z)| < e^{\frac{B+\varepsilon}{|z-\beta|}};$$

интерполирование производится функциями вида:

$$f_{2n}(z) = \frac{P_{2n}(z)}{(z-\alpha)^{\mu_n}(z-\beta)^{\nu_n}} \qquad (\mu_n + \nu_n = 2n),$$

причем полином $P_{2n}(z)$ степени $2n-1$ подбирается согласно условиям:

$$f_{2n}(a_m) = f(a_m), \quad f_{2n}(b_m) = f(b_m) \quad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

и предполагается, что имеют место асимптотические равенства:

$$|\alpha - a_n| \sim \frac{1}{n}, \qquad |\beta - b_n| \sim \frac{1}{n}.$$

Если допустим, что $\mu_n = \nu_n = n$, то получим условия сходимости:

$$A < h, \qquad B < h,$$

где

$$h \equiv h_1(2) = \int_2^\infty \lg(t-1)\frac{dt}{t^2} = \lg 2 = 0{,}69\ \ldots$$

Однако сходимость может быть обеспечена и в более общем случае, если

$$\frac{A+B}{2} < h;$$

для этого достаточно подбирать μ_n согласно неравенству:

$$2(A-h)\frac{n}{\lg n} + o\left(\frac{n}{\lg n}\right) < \mu_n - n < 2(h-B)\frac{n}{\lg n} + o\left(\frac{n}{\lg n}\right).$$

Замечание 1. В предыдущем изложении предполагалось, что все особенные точки α_ν находятся на конечном расстоянии. Не представляет труда включить и тот случай, когда бесконечно удаленная точка принадлежит к числу особенностей. Пусть имеются особенные точки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ (конечные) и $\alpha_p = \infty$. Тогда надлежит допустить, что рациональная функция $f_n(z)$ степени n в бесконечно удаленной точке имеет полюс, скажем, кратности μ_p; а это означает, что $f_n(z)$ должна иметь вид:

$$f_n(z) = \frac{P_n(z)}{(z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots(z-\alpha_{p-1})^{\mu_{p-1}}},$$

причем

$$\mu_p = n - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{p-1}).$$

Вся теория легко обобщается на этот случай: все основные формулировки остаются в силе.

Замечание 2. Вместо того чтобы помещать полюсы кратности $\mu_n^{(\nu)}$ интерполяционных функций в самих особенных точках α_ν, можно брать группу из $\mu_n^{(\nu)}$ полюсов в окрестности точки α_ν и во время процесса интерполяции (т. е. при $n \to \infty$) приближать их к этой точке. Если приближение совершается достаточно быстро, основные формулировки сохраняют силу даже без изменения констант.

Научно-исслед. институт математики Московского гос. университета. Поступило 25. I. 1937.

W. GONTCHAROFF. SUR L'INTERPOLATION DES FONCTIONS POSSÉDANT UN NOMBRE FINI DE POINTS SINGULIERS AU MOYEN DES FONCTIONS RATIONNELLES

RÉSUMÉ

Une fonction $f(z)$ étant régulière dans tout le plan sauf les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, on se propose de déterminer une fonction rationnelle

$$f_n(z) = \frac{P_n(z)}{(z-\alpha_1)^{\mu_n^{(1)}} \cdot (z-\alpha_2)^{\mu_n^{(2)}} \ldots (z-\alpha_p)^{\mu_n^{(p)}}},$$

($P_n(z)$ étant un polynôme de degré n, $\mu_n^{(\nu)}$ des entiers positifs, $\sum_{\nu=1}^{p} \mu_n^{(\nu)} = n$) telle que l'on ait

$$f_n(a_m^{(\nu)}) = f(a_m^{(\nu)}) \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots, \lambda_n^{(\nu)} \\ \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix},$$

où les $\lambda_n^{(\nu)}$ sont des entiers positifs tels que $\sum_{\nu=1}^{p} \mu_n^{(\nu)} = n$ et les nombres $a_m^{(\nu)}$ convergent vers α_ν lorsque $m \to \infty$.

Soit

$$|a_n^{(\nu)} - \alpha_\nu| > \frac{1}{(\omega_\nu + \varepsilon)\, n} \cdot \frac{1}{\rho_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

à partir d'une valeur de n suffisamment grande ($\varepsilon > 0$ arbitrairement petit); soit, d'autre part

$$|f(z)| < e^{(A_\nu + \varepsilon)\left|\frac{\lambda}{z-\alpha_\nu}\right|^{\rho_\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

dans un cercle de centre α_ν et de rayon suffisamment petit. Alors, pour qu'il y ait convergence

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

(d'une manière uniforme dans tout domaine fermé ne contenant aucun des points α_ν), il suffit que les conditions

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)}}{n} = 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)}}{n} \lg n < \Delta_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

soient vérifiées, où l'on a posé

$$\Delta_\nu = \rho_\nu \max_{\tau \geqslant 1} \tau^{\rho_\nu} \left[h_{\rho_\nu}(\tau \varkappa_\nu^{-\frac{1}{\rho_\nu}}) - A_\nu \omega_\nu^{\rho_\nu}\right],$$

$\varkappa_\nu = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(\nu)}}{n}$ (ces limites étant supposées existantes),

$$h_\rho(u) = \rho \int_u^\infty \lg(t-1) \frac{dt}{t^{\rho+1}}.$$

Pour le cas où il n'y a qu'un seul point singulier à l'infini, voir A. Gelfond [Rend. Linc. (6), 11, 1930].

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В настоящей работе установлена асимптотическая связь между некоторыми экстремальными задачами, относящимися к тригонометрическим полиномам.

Во всем дальнейшем мы будем обозначать через $G(\theta)$ тригонометрический полином порядка n с вещественными коэффициентами:

$$G(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta}, \ \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \tag{1}$$

а через $G^{(\gamma)}(\theta)$ — полином с заданными старшими коэффициентами $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$. Через $L[G]$ обозначим интеграл

$$L[G] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(\theta)| \, d\theta; \tag{2}$$

через $M[G]$ обозначим модуль-максимум полинома $G[\theta]$ в интервале $(0, 2\pi)$; наконец, через $\omega^{(c)}[G]$ обозначим линейную функцию от $s+1$ первых коэффициентов полинома $G(\theta)$:

$$\omega^{(c)}[G] = \Re \sum_{k=0}^{s} \bar{\gamma}_k c_{s-k}, \quad c_k = a_k + ib_k, \tag{3}$$

причем комплексные числа $c_0, c_1, \ldots, c_s$ даны.

Настоящая работа имеет целью установить связь между различными экстремальными задачами, имеющую место при безгранично возрастающем n и конечном s; в частности, мы придем к следующим двум теоремам:

ТЕОРЕМА А. *Максимум модуля линейной функции $\omega^{(c)}[G]$ от коэффициентов полинома $G(\theta)$, подчиненного условию $L[G] = 1$, асимптотически в $\frac{\pi}{2}$ раз больше, чем минимальное уклонение от*

нуля тригонометрического полинома с заданными старшими коэффициентами $c_0, c_1, \ldots, c_s$

$$\max \frac{|\omega^{(c)}[G]|}{L[G]} \sim \frac{\pi}{2} \min M[G^{(c)}]. \qquad (4)$$

ТЕОРЕМА В. *Максимум модуля той же линейной функции* $\omega^{(c)}[G]$ *при условии* $M[G]=1$ *асимптотически в* $\frac{\pi}{2}$ *раз больше, чем минимальное значение интеграла* $L[G^{(c)}]$ *от модуля полинома с заданными старшими коэффициентами* $c_0, c_1, \ldots, c_s$

$$\max \frac{|\omega^{(c)}[G]|}{M[G]} \sim \frac{\pi}{2} \min L[G^{(c)}]. \qquad (5)$$

§ 1

Задача I. *Найти асимптотическую величину минимального уклонения от нуля в интервале* $(0, 2\pi)$ *тригонометрического полинома*

$$G^{(\gamma)}(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \overline{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta} \qquad (6)$$

с заданными старшими коэффициентами $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_s$.

Эта задача является обобщением на случай тригонометрических полиномов аналогичной задачи, поставленной и решенной академиком С. Н. Бернштейном ([1]) для рациональных полиномов; мы будем решать нашу задачу, обобщая соответствующим образом его метод.

Поставленная задача сводится к нахождению наилучшего приближения функции $\Re \sum_{k=0}^{s} \overline{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta}$ посредством тригонометрических полиномов порядка $n-s-1$; поэтому, по общей теореме С. Н. Бернштейна о системе функций Чебышева ([2]), полином $G_1^{(\gamma)}(\theta)$, дающий решение задачи I*, должен достигать по крайней мере $2(n-s)$ раз своего экстремального значения $\pm M[G_1^{(\gamma)}]$ в интервале $(0, 2\pi)$.

Рассмотрим функцию

$$F(\theta) = \delta^{(c)} \Re \left\{ z^{n+\sigma} \frac{\overline{q}\left(\frac{1}{z}\right)}{q(z)} \right\}, \quad z = e^{i\theta}, \qquad (7)$$

где $q(z)$ и $z^{\sigma}\overline{q}\left(\frac{1}{z}\right)$ — полиномы степени σ,

$$q(z) = \sum_{i=0}^{\sigma} u_i z^{\sigma-i}, \quad z^{\sigma}\overline{q}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{i=0}^{\sigma} \overline{u}_i z^i, \qquad (8)$$

* Через $G_i(\theta)$ мы будем обозначать полином, дающий решение i-ой экстремальной задачи.

определяемые из разложения:

$$\delta^{(c)} \frac{q(z)}{z^{\sigma} \bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 z + \ldots + \bar{c}_s z^s + \ldots, \quad |z| \leqslant 1; \tag{9}$$

при этом $\delta^{(c)}$ является наибольшим корнем векового уравнения

$$C(\delta) = \begin{vmatrix} \delta & 0 & \ldots & 0 & \bar{c}_0 & \bar{c}_1 & \ldots & \bar{c}_s \\ 0 & \delta & \ldots & 0 & 0 & \bar{c}_0 & \ldots & \bar{c}_{s-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \delta & 0 & 0 & \ldots & \bar{c}_0 \\ c_0 & 0 & \ldots & 0 & \delta & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & c_0 & \ldots & 0 & 0 & \delta & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_s & c_{s-1} & \ldots & c_0 & 0 & 0 & \ldots & \delta \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

кратности $\nu + 1$ $(\nu \geqslant 0)$; $\sigma = s - \nu$.

Как известно (3),(4), все корни полинома $q(z)$ лежат в области $|z| < 1$.

Мы можем записать нашу функцию $F(\theta)$ в следующем виде:

$$F(\theta) = \delta^{(c)} \cos[(n+\sigma)\theta - 2\vartheta], \quad z = e^{i\theta}, \quad \vartheta = \arg q(z), \tag{11}$$

откуда ясно, что при изменении θ на 2π она $2(n-\sigma) \geqslant 2(n-s)$ раз достигает своего экстремального значения $\pm \delta^{(c)}$ *.

Нетрудно также убедиться в том, что первые коэффициенты ее целой части равны $c_0, c_1, \ldots, c_s$, ибо

$$F(\theta) = \Re\left\{z^n\left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_s}{z^s} + \ldots\right)\right\}, \quad z = e^{i\theta}. \tag{12}$$

Докажем, что *дробная часть функции* $F(\theta)$ *стремится к нулю вместе с* $\frac{1}{n}$.

Предположим, что все корни полинома $q(z)$ простые; в таком случае мы имеем:

$$z^n \frac{z^{\sigma} \bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)}{q(z)} = Q_n(z) + \frac{q_{\sigma-1}(z)}{q(z)}, \tag{13}$$

где $Q_n(z)$ и $q_{\sigma-1}(z)$ — полиномы степени n и $\sigma - 1$. Из (13) мы находим:

$$q_{\sigma-1}(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{n+\sigma} \bar{q}\left(\frac{1}{\varepsilon_i}\right), \quad q(z) = u_0 \prod_{i=1}^{\sigma} (z - \varepsilon_i), \tag{14}$$

откуда, по формуле Лагранжа,

$$\frac{q_{\sigma-1}(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{\varepsilon_i^{n+\sigma} \bar{q}\left(\frac{1}{\varepsilon_i}\right)}{q'(\varepsilon_i)(z - \varepsilon_i)}. \tag{15}$$

---

* Если все корни $q(z)$ вещественны, то мы придем к дроби, примененной С. Н. Бернштейном (5), (6), (2), а в последнее время—Н. И. Ахиезером (7), (8), (9), (10) при решении ряда экстремальных задач.

Так как наш полином $q(z)$ не зависит от n, то при $|z|=1$ имеем неравенство:

$$\left|\frac{q_{\sigma-1}(z)}{q(z)}\right| \leqslant A\,\varepsilon^{n+\sigma}, \tag{16}$$

где A — конечное число, $|\varepsilon_i| \leqslant \varepsilon < 1$ $(i=1, 2, \ldots, \sigma)$.

Мы видим, что наша функция $F(\theta)$ может быть представлена следующим образом *:

$$F(\theta) = \Re\left\{Q_n(z)\right\} + \eta_n, \quad z = e^{i\theta}, \tag{17}$$

где η_n стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$.

Мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА I. *Для всякого тригонометрического полинома порядка* n

$$G^{(\gamma)}(\theta) = \Re\sum_{k=0}^{n}\overline{\gamma}_k\, e^{i(n-k)\theta}$$

с заданными старшими коэффициентами $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ *имеет место (при безгранично возрастающем* n *и конечном* s*) неравенство*

$$M\left[G^{(\gamma)}\right] \geqslant M\left[G_1^{(\gamma)}\right] = \delta^{(\gamma)}, \tag{18}$$

где $\delta^{(\gamma)}$ — *наибольший корень векового уравнения (10)* **; *знак равенства имеет место для полинома*

$$G_1^{(\gamma)}(\theta) = \delta^{(\gamma)}\,\Re\left\{z^{n+\sigma}\frac{\overline{q}\left(\frac{1}{z}\right)}{q(z)}\right\} + \eta_n, \quad z = e^{i\theta}, \tag{19}$$

в котором η_n *стремится к нулю вместе с* $\frac{1}{n}$, *а* $\sigma = s - \nu$, *если* $\nu + 1$ *есть кратность корня* $\delta^{(\gamma)}$; *полиномы* $q(z)$ *и* $z^{\sigma}\,\overline{q}\left(\frac{1}{z}\right)$ *определяются из разложения (9)* **.

§ 2

Задача II. *Найти минимум интеграла*

$$L[G] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|G(\theta)|\,d\theta, \quad G(\theta) = \Re\sum_{k=0}^{n}\overline{\gamma}_k\, e^{i(n-k)\theta},$$

если $s+1$ *старших коэффициентов полинома* $G(\theta)$ *связаны линейным соотношением*

$$\omega^{(c)}[G] = \Re\sum_{k=0}^{n}\overline{\gamma}_k\, c_{s-k} = 1;$$

числа $c_0, c_1, \ldots, c_s$ *даны.*

---

* Аналогичным образом исследуется случай, когда $q(z)$ имеет кратные корни.

** В формулах (9) и (10) $c_0, c_1, \ldots, c_s$ надо заменить на $\overline{\gamma}_0, \overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_s$.

Рассмотрим полином $P(\theta)$ порядка $n-\nu$:

$$P(\theta)=\Re\left\{q^2(z)\,z^{n-2s+\nu}\right\},\ z=e^{i\theta}, \tag{20}$$

где $q(z)$ и ν имеют те же значения, как и в предыдущем параграфе.

Найдем разложение в ряд Фурье $\operatorname{sgn}P(\theta)$; для этого положим

$$z^{n-s}\frac{q(z)}{z^{\sigma}\bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)}=e^{i(n-\nu)\alpha},\ z=e^{i\theta}, \tag{21}$$

где α увеличивается на 2π вместе с θ.

В таком случае имеем:

$$\operatorname{sgn}P(\theta)=\operatorname{sgn}\frac{P(\theta)}{|q(z)|^2}=\operatorname{sgn}\Re\left\{z^{n-s}\frac{q(z)}{z^{\sigma}\bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)}\right\}=$$

$$=\operatorname{sgn}\cos(n-\nu)\alpha=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos(2k+1)(n-\nu)\alpha,\ z=e^{i\theta},$$

откуда находим искомое разложение:

$$\operatorname{sgn}P(\theta)=\frac{4}{\pi}\Re\left\{z^{n-s}\frac{q(z)}{z^{\sigma}\bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)}\right\}+\Re\sum_{k=3n-3s}^{\infty}\lambda_k z^k=$$

$$=\frac{4}{\pi\delta^{(c)}}\Re\sum_{i=0}^{\infty}\bar{c}_i z^{n-s+i}+\Re\sum_{k=3n-3s}^{\infty}\lambda_k z^k. \tag{22}$$

Умножая обе части на произвольный полином $G(\theta)$ порядка $n\leqslant 3n-3s-1$ и интегрируя, имеем:

$$\left|\omega^{(c)}[G]\right|=\frac{\delta^{(c)}}{4}\left|\int_0^{2\pi}G(\theta)\operatorname{sgn}P(\theta)\,d\theta\right|\leqslant\frac{\pi\delta^{(c)}}{2}L[G]. \tag{23}$$

Мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА II. *Для всякого тригонометрического полинома порядка не выше n имеет место неравенство*

$$\frac{L[G]}{|\omega^{(c)}[G]|}\geqslant\frac{L[G_2]}{|\omega^{(c)}[G_2]|}=\frac{2}{\pi\delta^{(c)}},\ s\leqslant\left[\frac{2n-1}{3}\right], \tag{24}$$

где

$$L[G]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|G(\theta)|\,d\theta,\ \omega^{(c)}[G]=\Re\sum_{k=0}^{s}\bar{\gamma}_k c_{s-k};$$

знак равенства имеет место для полинома

$$G_2(\theta)=\Re\left\{q^2(z)\,z^{n-2s+\nu}\right\}|\tau(z)|^2,\quad z=e^{i\theta}, \tag{25}$$

причем $\delta^{(c)}$, $q(z)$ и ν имеют те же значения, как и в § 1; $\tau(z)$ — произвольный полином степени $\leqslant\nu$.

Сравнение теорем I и II дает теорему A введения.

§ 3

Задача III. *Найти минимум интеграла*

$$L[G^{(\gamma)}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G^{(\gamma)}(\theta)|\,d\theta, \quad G^{(\gamma)}(\theta) = \Re\sum_{k=0}^{n}\overline{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta},$$

если даны старшие коэффициенты $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ *.

Подберем полином $r(z)$ степени $\sigma \leqslant s$, все корни которого лежат в области $|z|>1$, и полином $\tau(z)$ степени $\nu = s-\sigma$ из условия

$$r^2(z)\, z^{\nu}\,\tau(z)\,\overline{\tau}\left(\frac{1}{z}\right) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_s z^s + \ldots; \tag{26}$$

это всегда можно сделать и притом единственным образом на основании теоремы F. Riesz'a [см. (2), стр. 167—168].

Введем коэффициенты разложения

$$\frac{z^{\sigma}\,\overline{r}\left(\frac{1}{z}\right)}{r(z)} = k_0 + k_1 z + \ldots + k_s z^s + \ldots, \ |z| \leqslant 1. \tag{27}$$

В таком случае, для всякого тригонометрического полинома $G^{(\gamma)}(\theta)$ с заданными старшими коэффициентами $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ имеет место неравенство:

$$\frac{L[G^{(\gamma)}]}{|\omega^{(k)}[G^{(\gamma)}]|} \geqslant \frac{L[G_2^{(\gamma)}]}{|\omega^{(c)}[G_2^{(\gamma)}]|} = \frac{2}{\pi\,\delta^{(k)}},$$

где полином $G_2^{(\gamma)}(\theta)$ равен

$$G_2^{(\gamma)}(\theta) = \Re\left\{z^{n-2s+\nu}q^2(z)\right\}|\tau(z)|^2 = \Re\left\{z^{n-2s+\nu}\left[z^{\sigma}\overline{r}\left(\frac{1}{z}\right)\right]^2\right\}|\tau(z)|^2 =$$
$$= \Re(\overline{\gamma}_0 z^n + \ldots + \overline{\gamma}_s z^{n-s} + \ldots), \ z = e^{i\theta}, \tag{28}$$

причем $r(z)$ и $\tau(z)$ подобраны из условия (26); отсюда

$$L[G^{(\gamma)}] \geqslant L[G_2^{(\gamma)}] = \frac{2|\omega^{(k)}[G^{(\gamma)}]|}{\delta^{(k)}}. \tag{29}$$

Вводя снова переменную α

$$e^{i(n-\nu)\alpha} = z^{n-s}\frac{q(z)}{z^{\sigma}\,\overline{q}\left(\frac{1}{z}\right)} = z^{n-s}\frac{z^{\sigma}\,\overline{r}\left(\frac{1}{z}\right)}{r(z)}, \quad z = e^{i\theta},$$

мы находим

$$G_2^{(\gamma)}(\theta) = |\tau(z)\,r(z)|^2\cos(n-\nu)\alpha, \quad z = e^{i\theta},$$

$$\operatorname{sgn} G_2^{(\gamma)}(\theta) = \frac{4}{\pi}\left\{\cos(n-\nu)\alpha - \frac{1}{3}\cos 3(n-\nu)\alpha + \ldots\right\};$$

отсюда получаем

$$|G_2^{(\gamma)}(\theta)| = |r(z)\,\tau(z)|^2\left\{\frac{2}{\pi} + \Re\sum_{k=2n-2s}^{\infty}\lambda_k z^k\right\}, \quad z = e^{i\theta}$$

* Задачи II и III являются обобщением известной задачи А. Коркина и Е. Золотарева (11); см. также (12) и (13).

и окончательно

$$L[G_2^{(\gamma)}] = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} |r(z)\,\tau(z)|^2\,d\theta, \quad z = e^{i\theta}. \tag{30}$$

Мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА III. *Для всякого тригонометрического полинома порядка n*

$$G^{(\gamma)}(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k\, e^{i(n-k)\theta}$$

с заданными старшими коэффициентами $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ *имеет место неравенство:*

$$L[G^{(\gamma)}] \geqslant L[G_3^{(\gamma)}], \quad s \leqslant \left[\frac{2n-1}{3}\right];$$

полином, осуществляющий минимум, равен

$$G_3^{(\gamma)}(\theta) = \Re\left\{z^{n-2s+\nu}\left[z^{\sigma}\bar{r}\left(\frac{1}{z}\right)\right]^2\right\}|\tau(z)|^2, \quad z = e^{i\theta}, \tag{31}$$

где полином $r(z)$ *степени* $\sigma \leqslant s$, *имеющий все корни в области* $|z| > 1$, *и полином* $\tau(z)$ *степени* $\nu = s - \sigma$ *подобраны из условия*

$$r^2(z)\,z^{\nu}\,\tau(z)\,\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_s z^s + \ldots; \tag{32}$$

минимальное значение интеграла равно

$$L[G_3^{(\gamma)}] = \frac{2\,|\omega^{(k)}[G_3^{(\gamma)}]|}{\pi\,\delta^{(k)}} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} |r(z)\,\tau(z)|^2\,d\theta, \quad z = e^{i\theta}, \tag{33}$$

где числа $k_0, k_1, \ldots, k_s$ *определяются из разложения*

$$\frac{z^{\sigma}\bar{r}\left(\frac{1}{z}\right)}{r(z)} = k_0 + k_1 z + \ldots + k_s z^s + \ldots \quad |z| \leqslant 1. \tag{34}$$

Отсюда, в частности, легко получить ответ для $s = 1$, приведенный в нашей заметке ([15]).

Заметим также, что, если в теоремах II и III полином подчинить дополнительному условию — быть неотрицательным, — то минимальное значение $L[G]$ увеличится в $\frac{\pi}{2}$ раз при условии $s \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

§ 4

Задача IV. *Найти асимптотическую величину наименьшего уклонения от нуля в интервале* $(0, 2\pi)$ *тригонометрического полинома*

$$G(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k\, e^{i(n-k)\theta},$$

старшие коэффициенты которого связаны линейным соотношением

$$\omega^{(c)}[G] = \Re \sum_{k=0}^{s} \overline{\gamma}_k c_{s-k} = 1.$$

По теореме III мы имеем:

$$L[G^{(c)}] \geqslant L[G_3^{(c)}],$$

где

$$\left.\begin{aligned} G_3^{(c)}(\theta) = \Re\left\{z^{n-2s+\nu}\left[z^{\sigma}\overline{r}\left(\frac{1}{z}\right)\right]^2\right\}|\tau(z)|^2, \quad z = e^{i\theta}, \\ r^2(z)\, z^{\nu}\,\tau(z)\,\overline{\tau}\left(\frac{1}{z}\right) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_s z^s + \ldots; \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

кроме того, мы нашли

$$\left.\begin{aligned} L[G_3^{(c)}] = \frac{2\,|\,\omega^{(k)}[G^{(c)}]\,|}{\pi\delta^{(k)}}, \\ \frac{z^{\sigma}\overline{r}\left(\frac{1}{z}\right)}{r(z)} = k_0 + k_1 z + \ldots + k_s z^s + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Имеем очевидное неравенство:

$$\frac{M[G_4]}{|\,\omega^{(c)}[G_4]\,|} \leqslant \frac{M[G_1^{(m)}]}{|\,\omega^{(c)}[G_1^{(m)}]\,|},$$

где $G_1^{(m)}(\theta)$ — полином, осуществляющий минимум в задаче I при заданных старших коэффициентах $m_0, m_1, \ldots, m_s$; при $n \to \infty$ и конечном s имеем

$$\frac{M[G_4]}{|\,\omega^{(c)}[G_4]\,|} \leqslant \frac{\delta^{(m)}}{|\,\omega^{(m)}[G^{(c)}]\,|}, \qquad (37)$$

ибо

$$\omega^{(m)}[G^{(c)}] = \omega^{(c)}[G^{(m)}] = \Re \sum_{k=0}^{s} \overline{c}_k\, m_{s-k}.$$

До сих пор числа $m_0, m_1, \ldots, m_s$ были совершенно произвольными; возьмем их теперь равными числам $k_0, k_1, \ldots, k_s$ из (36). В таком случае будем иметь:

$$\frac{M[G_4]}{|\,\omega^{(c)}[G_4]\,|} \leqslant \frac{\delta^{(k)}}{|\,\omega^{(k)}[G^{(c)}]\,|} = \frac{2}{\pi L[G_3^{(c)}]}. \qquad (38)$$

С другой стороны, обозначая старшие коэффициенты полинома $G_4(\theta)$ через $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$, имеем:

$$M[G_4] \geqslant M[G_1^{(\gamma)}] = \delta^{(\gamma)},$$

откуда

$$\frac{M[G_4]}{|\,\omega^{(c)}[G_4]\,|} \geqslant \frac{\delta^{(\gamma)}}{|\,\omega^{(\gamma)}[G^{(c)}]\,|}. \qquad (39)$$

Сравнение этого последнего неравенства с неравенством (37), справедливым при произвольных числах $m_0, m_1, \ldots, m_s$, приводит к выводу

$$M[G_4] = \delta^{(\gamma)}. \qquad (40)$$

Из теоремы II имеем неравенство

$$L[G] \geqslant \frac{2}{\pi\delta^{(\gamma)}} |\omega^{(\gamma)}[G]|;$$

поэтому при любых числах $c_0, c_1, \ldots, c_s$ получим

$$L[G^{(c)}] \geqslant \frac{2}{\pi\delta^{(\gamma)}} |\omega^{(\gamma)}[G^{(c)}]|,$$

т. е.

$$\frac{M[G_4]}{|\omega^{(c)}[G_4]|} \geqslant \frac{2}{\pi L[G_3^{(c)}]}. \tag{41}$$

Сравнение этого неравенства с неравенством (38) дает

$$\frac{M[G_4]}{|\omega^{(c)}[G_4]|} = \frac{2}{\pi L[G_3^{(c)}]}. \tag{42}$$

Мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА IV. *Для всякого тригонометрического полинома порядка n*

$$G(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \overline{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta}$$

имеет место неравенство (при безгранично возрастающем n и конечном s)

$$\frac{|\omega^{(c)}[G]|}{M[G]} \leqslant \frac{\pi}{2} L[G_3^{(c)}], \tag{43}$$

где

$$\omega^{(c)}[G] = \Re \sum_{k=0}^{s} \overline{c}_k \gamma_{s-k}, \quad |G(\theta)| \leqslant M[G], \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi;$$

$G_3^{(c)}(\theta)$ — полином с заданными старшими коэффициентами $c_0, c_1, \ldots, c_s$, дающий решение задачи III; знак равенства в (43) имеет место для полинома

$$G_4(\theta) = \Re \left\{ z^n \frac{r(z)}{z^\sigma \overline{r}\left(\frac{1}{z}\right)} \right\} + \eta_n, \quad z = e^{i\theta}, \tag{44}$$

где η_n стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$; полином $r(z)$ степени $\sigma \leqslant s$, все корни которого лежат в области $|z| > 1$, определяется из (35).

Сравнение теорем III и IV дает теорему В введения.

Теоремы, аналогичные теоремам А и В, имеют место для аналитических функций $f(z)$, регулярных в области $|z| < 1$; этот результат можно сформулировать следующим образом:

ТЕОРЕМА A′,B′. *Для всех функций $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, регулярных в области $|z| \leqslant 1$ и удовлетворяющих условию*

$$L[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(z)|\,|dz| = 1, \tag{45}$$

максимум модуля линейной функции

$$\omega^{(c)}[f] = \sum_{k=0}^{s} a_k c_{s-k} \tag{46}$$

равен минимальному значению верхней границы $M[F^{(c)}]$ *модуля функции* $F^{(c)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *в области* $|z| < 1$, *которая в этой области регулярна и имеет первые коэффициенты* $c_0, c_1, \ldots, c_s$, *т. е.*

$$\max \frac{|\omega^{(c)}[f]|}{L[f]} = \min M[F^{(c)}]. \tag{47}$$

Если же функция $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, *регулярная в области* $|z| < 1$, *подчинена условию*

$$\sup |f(z)| = M[f] = 1, \quad |z| < 1,$$

то максимум модуля $\omega^{(c)}[F]$ *равен минимуму среднего значения на круге* $|z| = 1$ *модуля функции* $F^{(c)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, *регулярной в области* $|z| \leqslant 1$ *и имеющей первые коэффициенты* $c_0, c_1, \ldots, c_s$

$$\max \frac{|\omega^{(c)}[f]|}{M[f]} = \min L[F^{(c)}]. \tag{48}$$

Первая половина теоремы вытекает из связи между задачами Carathéodory — Fejér'а и F. Riesz'а ([14]), ([16]); вторая половина установлена автором ([17]) *.

§ 5

Рассмотрим теперь рациональные полиномы с вещественными коэффициентами; мы будем их записывать таким образом:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_{n-k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k U_{n-k}(x), \tag{49}$$

где

$$T_\nu(x) = \cos \nu\theta, \quad U_\nu(x) = \frac{\sin(\nu+1)\theta}{\sin\theta}, \; x = \cos\theta \;\; (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{50}$$

Коэффициенты α_i и β_i выражаются в зависимости от σ следующим образом:

---

* G. Szegö любезно указал мне (в письме), что результат, полученный мною в ([17]), был впервые получен O. Szász'ом в работах «Über die Koeffizienten beschränkter Potenzreihen», «Über beschränkte Potenzreihen», напечатанных на венгерском языке (с немецким резюме) в Вестнике Венгерской Академии Наук за 1926 г. (Примечание дано при просмотре корректуры 15. VI. 1937.—Я. Г.).

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1}{2^{n-i-1}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \frac{\sigma_{i-2k}}{2^{2k}} \binom{n-i+2k}{k} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=0,1,2,\ldots,s) \\ \beta_i &= \frac{n-i+1}{2^{n-i}} \cdot \sum_{k=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \frac{\sigma_{i-2k}}{2^{2k}(n-i+2k+1)} \binom{n-i+2k+1}{k} \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Введем также обозначение:

$$\left.\begin{aligned} L[Q] &= \int_{-1}^{+1} |Q(x)|\,dx, \quad L_1[Q] = \int_{-1}^{+1} |Q(x)| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \omega^{(d)}[Q] &= \sum_{k=0}^{s} d_k \sigma_{s-k} = \sum_{k=0}^{s} a_k \alpha_{s-k} = \sum_{k=0}^{s} b_k \beta_{s-k}, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

где d_k — данные вещественные числа; легко найдем:

$$\left.\begin{aligned} a_{s-i} &= (n-i) \sum_{k=0}^{\left[\frac{s-i}{2}\right]} 2^{n-i-2k-1} \frac{d_{s-i-2k}}{n-i-2k} \binom{-n+i+2k}{k} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=0,1,\ldots,s) \\ b_{s-i} &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{s-i}{2}\right]} 2^{n-i-2k} d_{s-i-2k} \binom{-n+i+2k-1}{k} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Рассмотрим теперь решение наших четырех задач.

Чтобы решить задачу I, надо положить $c_i = \alpha_i$ $(0, 1, 2, \ldots, s)$; легко видеть, что при этом наше вековое уравнение (10) $C(\delta) = 0$ распадется на два:

$$C(\delta) = \text{const}\, A(\delta) A(-\delta) = 0,$$

$$A(\delta) = \begin{vmatrix} \alpha_s - \delta & \alpha_{s-1} & \ldots & \alpha_1 & \alpha_0 \\ \alpha_{s-1} & \alpha_{s-2} - \delta & \ldots & \alpha_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_0 & 0 & \ldots & 0 & -\delta \end{vmatrix} \tag{54}$$

Если даны коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$, то имеем неравенство

$$M[Q^{(\alpha)}] \geqslant M[Q_1^{(\alpha)}] = |\delta^{(\alpha)}|,$$

где $\delta^{(\alpha)}$ корень уравнения $A(\delta) = 0$, имеющий наибольший модуль.

Пусть теперь даны коэффициенты $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s$ *(одного порядка относительно* n*).*

Если s четное, то по формуле (51) имеем:

$$\alpha_s \sim \frac{\sigma_0 n^{\frac{s}{2}}}{2^{n-1} \frac{s}{2}!}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_i}{\alpha_s} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, s-1); \tag{55}$$

при этом

$$|\delta^{(\alpha)}| \sim |\alpha_s| \sim \frac{|\sigma_0|\, n^{\frac{s}{2}}}{2^{n-1} \frac{s}{2}!}. \tag{56}$$

Если же s нечетное число, то

$$\alpha_{s-1} \sim \frac{\sigma_0 n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n-1}\frac{s-1}{2}!}, \quad \alpha_s \sim \frac{\sigma_1 n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n-2}\frac{s-1}{2}!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_i}{\alpha_s} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, s-2); \tag{57}$$

в этом случае имеем:

$$|\delta^{(\alpha)}| \sim \frac{|\alpha_s| + \sqrt{\alpha_s^2 + 4\alpha_{s-1}^2}}{2} \sim \frac{n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n-1}\frac{s-1}{2}!} \left\{|\sigma_1| + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_0^2}\right\}. \tag{58}$$

Мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА I′. *При безгранично возрастающем n и конечном s для всякого полинома*

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_{n-k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k x^{n-k}$$

степени n с заданными старшими коэффициентами $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s$ (одного порядка относительно n) имеет место на отрезке $(-1, +1)$ неравенство

$$M[Q] \geqslant \begin{cases} \dfrac{|\sigma_0| n^{\frac{s}{2}}}{2^{n-1}\frac{s}{2}!} & (s \text{ — четное}), \\[2ex] \dfrac{n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n-1}\frac{s-1}{2}!}\left\{|\sigma_1| + \sqrt{\sigma_1^2 + \alpha_0^2}\right\} & (s \text{ — нечетное}). \end{cases} \tag{59}$$

Формула (59) принадлежит С. Н. Бернштейну ([1]) *.

§ 6

Задачу II для рациональных полиномов легко решить для любых n, пользуясь теоремой II. Если в уравнении (10) положить $c_k = ib_k$ $(k = 0, 1, \ldots, s)$, то уравнение распадется на два:

$$C(\delta) = \text{const}\, B(\delta)\, B(-\delta) = 0,$$

$$B(\delta) = \begin{vmatrix} b_s - \delta & b_{s-1}, & \ldots & b_1 & b_0 \\ b_{s-1} & b_{s-2} - \delta & \ldots & b_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & 0 & \ldots & 0 & -\delta \end{vmatrix}. \tag{60}$$

* Нетрудно убедиться в том, что основные свойства функции $F(\theta)$, рассмотренной нами в § 1, сохраняются и в том случае, который рассмотрен в этом параграфе.

Если же n безгранично возрастает, s остается конечным и все числа $d_0, d_1, \ldots, d_s$ одного порядка относительно n, то при s четном имеем по (53)

$$b_s \sim (-1)^{\frac{s}{2}} 2^{n-s} \frac{n^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}!} d_0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{b_i}{b_s} = 0 \quad (i = 0, 1, .., s-1); \tag{61}$$

при этом

$$|\delta| \sim |b_s| \sim \frac{2^{n-s} n^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}!} |d_0|; \tag{62}$$

при s нечетном имеем:

$$b_s \sim (-1)^{\frac{s-1}{2}} \frac{2^{n-s+1} n^{\frac{s-1}{2}}}{\frac{s-1}{2}!} d_1, \quad b_{s-1} \sim (-1)^{\frac{s-1}{2}} \frac{2^{n-s} n^{\frac{s-1}{2}} d_0}{\frac{s-1}{2}!}, \tag{63}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_i}{b_s} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, s-2);$$

при этом

$$|\delta| \sim \frac{1}{2} \left\{ |b_s| + \sqrt{b_s^2 + 4b_{s-1}^2} \right\} \sim \frac{2^{n-s} n^{\frac{s-1}{2}}}{\frac{s-1}{2}!} \left\{ |d_1| + \sqrt{d_1^2 + d_0^2} \right\}. \tag{64}$$

Мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА II′. *Для всякого полинома*

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k x^{n-k}$$

степени n, подчиненного условию

$$L[Q] = \int_{-1}^{+1} |Q(x)| \, dx = 1,$$

имеет место следующее неравенство (при безгранично возрастающем n, конечном s и числах $d_0, d_1, \ldots, d_s$ одного порядка):

$$\left| \sum_{k=0}^{s} d_k \sigma_{s-k} \right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2^{n-s-1} n^{\frac{s}{2}} |d_0|}{\frac{s}{2}!} & (s \text{ — четное}), \\[2ex] \dfrac{2^{n-s-1} n^{\frac{s-1}{2}}}{\frac{s-1}{2}!} \left\{ |d_1| + \sqrt{d_1^2 + d_0^2} \right\} & (s \text{ — нечетное}). \end{cases} \tag{65}$$

Мы вывели теоремы I′ — II′ независимо друг от друга. Пользуясь теоремой A, можно было бы одну из них вывести из другой.

§ 7

Рассмотрим теперь задачу III — о нахождении минимума интеграла

$$L[Q]=\int_{-1}^{+1}|Q(x)|\,dx, \quad Q(x)=\sum_{k=0}^{n}\sigma_k x^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\beta_k U_{n-k}(x),$$

если заданы старшие коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_s$ или $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s$. Задачу легко решить при любых значениях n, если воспользоваться теоремой III. Построим полином

$$Q_s^{(\sigma)}(x)=\Re\left\{z^{n-2s+\nu+1}\left[z^{\sigma}\bar{r}\left(\frac{1}{z}\right)\right]^2\right\}|\tau(z)|^2, \; z=e^{i\theta}, \; x=\cos\theta, \quad (66)$$

где полиномы $r(z)$ и $\tau(z)$ определяются из разложения:

$$r^2(z)\,z^{\nu}\tau(z)\,\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right)=-i(\beta_0+\beta_1 z+\ldots+\beta_s z^s+\ldots), \quad (67)$$

причем $ir^2(z)$ и $\tau(z)$ имеют вещественные коэффициенты; в таком случае имеем:

$$L[Q^{(\sigma)}]\geqslant L[Q_s^{(\sigma)}]=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|r(z)\tau(z)|^2\,d\theta, \quad z=e^{i\theta}. \quad (68)$$

Найдем асимптотическое решение нашей задачи: будем считать, что *n безгранично возрастает, s остается конечным, и все заданные коэффициенты $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s$ одного порядка.*

Пусть сперва s четное; в таком случае имеем по (51):

$$\beta_s\sim\frac{\sigma_0 n^{\frac{s}{2}}}{2^n\,\frac{s}{2}\,!}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_i}{\beta_s}=0 \quad (i=0, 1, \ldots, s-1); \quad (69)$$

формула (67) дает:

$$r^2(z)\,z^{\nu}\tau(z)\,\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right)=-i\sum_{k=0}^{s-1}\beta_k z^k-i\,\frac{\sigma_0 n^{\frac{s}{2}}}{2^n\,\frac{s}{2}\,!}\,z^s+\ldots; \quad (67')$$

это соотношение удовлетворяется, если положить

$$\nu=s, \quad r^2(z)=-i\frac{\sigma_0}{|\sigma_0|}, \quad |\tau(z)|^2=\frac{|\sigma_0|\,n^{\frac{s}{2}}}{2^n\,\frac{s}{2}\,!}\,[1+\varepsilon_n], \quad (70)$$

где ε_n стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$.

По формуле (68) имеем:

$$L[Q_s^{(\sigma)}]=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|r(z)\tau(z)|^2\,d\theta\sim\frac{|\sigma_0|\,n^{\frac{s}{2}}}{2^{n-1}\,\frac{s}{2}\,!}, \quad z=e^{i\theta}. \quad (71)$$

Пусть теперь s нечетное число; по формуле (51) имеем:

$$\beta_{s-1} \sim \frac{c_0 n^{\frac{s-1}{2}}}{2^n \frac{s-1}{2}!}, \quad \beta_s \sim \frac{c_1 n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n-1}\frac{s-1}{2}!}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_i}{\beta_s} = 0 \ (i = 0, 1, \ldots, s-2). \tag{72}$$

Формула (67) напишется таким образом:

$$r^2(z)\, z^\nu \tau(z)\, \overline{\tau}\left(\frac{1}{z}\right) = -i \sum_{k=0}^{s-2} \beta_k z^k - i z^{s-1} \frac{n^{\frac{s-1}{2}}}{2^n \frac{s-1}{2}!}(\sigma_0 + 2\sigma_1 z) + \ldots \tag{67''}$$

Если $|\sigma_0| > |\sigma_1|$, то полином $r(z)$, где

$$r^2(z) = -i\left(\sqrt{\sigma_0} + \frac{\sigma_1 z}{\sqrt{\sigma_0}}\right)^2, \tag{73}$$

не обращается в нуль в области $|z| \leqslant 1$; полагая

$$\nu = s - 1, \quad |\tau(z)|^2 = \frac{n^{\frac{s-1}{2}}}{2^n \frac{s-1}{2}!}[1 + \varepsilon_n'], \quad z = e^{i\theta},$$

мы удовлетворим соотношению (67); при этом

$$L[Q_s^{(\sigma)}] \sim \frac{n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n-1}\frac{s-1}{2}!}|\sigma_0| \left\{1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2\right\}. \tag{74}$$

Если же $|\sigma_0| \leqslant |\sigma_1|$, то (67) удовлетворится, если положить

$$r^2(z) = -\frac{i}{\overline{\sigma}_1}, \quad \nu = s,$$

$$|\tau(z)|^2 = \frac{n^{\frac{s-1}{2}}\overline{\sigma}_1}{2^n \frac{s-1}{2}!}\left\{2\sigma_1 + \frac{\sigma_0}{z} + \overline{\sigma}_0 z + \varepsilon_n''\right\}, \quad z = e^{i\theta},$$

причем

$$L[Q_s^{(\sigma)}] \sim \frac{|\sigma_1|\, n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n-2}\frac{s-1}{2}!}. \tag{75}$$

Мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА III'. *Для всякого полинома степени* n

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k x^{n-k}$$

с заданными старшими коэффициентами $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s$ *имеет место неравенство (в предположении, что* n *безгранично возрастает,* s *остается конечным и все заданные коэффициенты одного порядка)*

s — четное

$$\int_{-1}^{1} |Q(x)|\, dx \geqslant \frac{|\sigma_0|\, n^{\frac{s}{2}}}{2^{n-1}\frac{s}{2}!}, \tag{76}$$

s — *нечетное*

$$\int_{-1}^{1} |Q(x)|\,dx \geqslant \begin{cases} \dfrac{|\sigma_1|\, n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n-2}\frac{s-1}{2}!}, & |\sigma_1| \geqslant |\sigma_0|, \\ \dfrac{|\sigma_0|\, n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n-1}\frac{s-1}{2}!}\left\{1+\left(\dfrac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2\right\}, & |\sigma_1| \leqslant |\sigma_0|. \end{cases} \tag{76'}$$

§ 8

Рассмотрим, наконец, задачу IV, т. е. будем искать (асимптотически) минимальное уклонение от нуля на отрезке $(-1, +1$ полинома

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_{n-k}(x),$$

старшие коэффициенты которого связаны линейным соотношением:

$$\omega[Q] = \sum_{k=0}^{s} \sigma_k d_{s-k} = \sum_{k=0}^{s} \alpha_k a_{s-k} = 1.$$

Согласно теореме В максимум $\dfrac{|\omega[Q]|}{M[Q]}$ асимптотически в два раза меньше минимума интеграла

$$L_1[Q^{(a)}] = \int_{-1}^{1} |Q^{(a)}(x)| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

где полином $Q^{(a)}(x)$ имеет старшие члены

$$a_0 T_n(x) + \ldots + a_s T_{n-s}(x) + \ldots$$

Пусть все d_k $(k = 0, 1, \ldots, s)$ одного порядка; в таком случае, по формуле (53), имеем при s четном

$$a_s \sim (-1)^{\frac{s}{2}} \frac{2^{n-s-1} n^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}!} d_0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_i}{a_s} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, s-1), \tag{77}$$

а при s нечетном:

$$a_s \sim \frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}} 2^{n-s} n^{\frac{s-1}{2}}}{\frac{s-1}{2}!} d_1, \quad a_{s-1} \sim \frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}} 2^{n-s-1} n^{\frac{s-1}{2}}}{\frac{s-1}{2}!} d_0, \tag{78}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_i}{a_s} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, s-2).$$

Применяя тот же метод, как в § 7, мы приходим к теореме:

ТЕОРЕМА IV′. *Для всякого полинома степени* n

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k x^{n-k},$$

который на отрезке $(-1, +1)$ *по абсолютной величине не превосходит единицы, имеет место неравенство (при безгранично возрастающем* n, *конечном* s *и числах* $d_0, d_1, \ldots, d_s$ *одного порядка):*

s — *четное*

$$\left|\sum_{k=0}^{s} \sigma_k d_{s-k}\right| \leqslant \frac{2^{n-s-1} n^{\frac{s}{2}} |d_0|}{\frac{s}{2}!}, \tag{79}$$

s — *нечетное*

$$\left|\sum_{k=0}^{s} \sigma_k d_{s-k}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2^{n-s} n^{\frac{s-1}{2}} |d_1|}{\frac{s-1}{2}!}, & |d_0| \leqslant |d_1|, \\ \dfrac{2^{n-s-1} n^{\frac{s-1}{2}} |d_0|}{\frac{s-1}{2}!} \left\{1 + \left(\dfrac{d_1}{d_0}\right)^2\right\}, & |d_0| \geqslant |d_1|. \end{cases} \tag{79'}$$

Эти формулы, дающие асимптотическое решение задачи В. Маркова, были впервые получены В. Ф. Бржечка ([18]) иным путем

Институт математики и механики
Харьковского гос. университета.

Поступило
20.XI.1936.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bernstein S., Sur les propriétés asymptotiques des polynômes, Comptes Rendus, **157**, 1913, pp. 1055.

[2] Bernstein S., Leçons sur les propriétés extrémales, Paris, 1926, стр. 3.

[3] Takagi T., On an Algebraic Problem Related to an Analytic Theorem of Carathéodory and Fejér and on an Allied Theorem of Landau, Japanese Journal of Mathematics, **I**, 1924, стр. 83.

[4] Takagi T., Remarks on an Algebraic Problem, ibid., т. II, 1925.

[5] Бернштейн С., Об асимптотическом значении наилучшего приближения аналитических функций, Сообщения Харьковского математического общества, **XIII**, 1913, стр. 1.

[6] Bernstein S., Remarques sur l'inégalité de Wladimir Markoff, ibid., **XIV**, 1915, стр. 81.

[7] Achyeser N., Asymptotische Lösung einer Aufgabe über Polynome minimaler Abweichung, ibid., **IV**, 1930, стр. 141.

[8] Achyeser N., Über asymptotische Grösse des besten Annäherung einiger rationellen Funktionen durch Polynome, ibid., **V**, 1932, стр. 37.

[9] Achyeser N., Über ein Tchebyscheffsches Extremumproblem, Mathematische Annalen, **104**, 1931, стр. 739.

[10] Achyeser N., Über einige Funktionen die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, Сообщения Казанского физ.-мат. общ., **3**, 1928, стр. 1.

[11] Korkine A. et Zolotareff G., Sur un certain minimum, Nouvelles Annales de Mathématiques, **XII**, 1873.

[12] Bernstein S., Sur les polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini, Journal de Mathématiques, **IX**, 1930, стр. 127.

[13] Bernstein S., Sur une propriété des polynômes de Tchebycheff, Доклады Акад. Наук СССР, 1927, стр. 405.
[14] Riesz F., Über Potenzreihen mit vorgeschriebenen Anfangsgliedern, Acta Mathematica, **42,** 1920, стр. 145.
[15] Geronimus J., Sur quelques inégalités pour les polynômes dont les coefficients premiers sont donnés, Comptes Rendus, **200,** 1935, стр. 1513.
[16] Takenaka S., On the Mean Modulus of Regular Functions, Japanese Journal of Math., **II,** 1925, стр. 47.
[17] Геронимус Я., К проблеме коэффициентов для ограниченных функций, Доклады Академии Наук СССР, **XIV,** 3, 1937.
[18] Бржечка В., О некоторых экстремальных свойствах кратно-монотонных и монотонных полиномов (в печати).

J. GERONIMUS. SUR QUELQUES PROBLÈMES EXTRÉMAUX
RÉSUMÉ

L'auteur considère les propriétés extrémales des polynômes trigonométriques de la forme

$$G(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta} \qquad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$$

et trouve les relations asymptotiques suivantes:

THÉORÈME A. *Soit*

$$\omega^{(c)}[G] = \Re \sum_{k=0}^{s} \bar{\gamma}_k c_{s-k} \qquad c_k = a_k + ib_k$$

une fonction linéaire dépendant des $s+1$ *premiers coefficients d'un polynôme* $G(\theta)$ *vérifiant la condition*

$$L[G] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(\theta)|\, d\theta = 1;$$

parmi tous les polynômes

$$G^{(c)}(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{c}_k e^{i(n-k)\theta}$$

à coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_s$ *donnés, considérons celui dont l'écart de zéro dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$ *est minimal; alors pour s constant et* $n \to \infty$ *le rapport du maximum de la valeur absolue de* $\omega^{(c)}[G]$ *et de cet écart tend vers* $\frac{\pi}{2}$.

THÉORÈME B. *Si l'écart de zéro du polynôme* $G(\theta)$ *dans* $(0, 2\pi)$ *ne dépasse pas l'unité, le rapport du maximum de la valeur absolue de* $\omega^{(c)}[G]$ *et du minimum de la valeur de l'intégrale* $L[G^{(c)}]$ *tend vers* $\frac{\pi}{2}$ *pour s constant et* $n \to \infty$.

En applicant ces théorèmes aux polynômes à coefficients rationnels on trouve une relation asymptotique entre le problème généralisé de Korkine et Zolotareff et les problèmes de W. Markoff et S. Bernstein.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathematiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

Д. Е. МЕНЬШОВ

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ ЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Рассматривается суммирование рядов по ортогональным функциям некоторыми линейными методами, которые являются частным случаем регулярных методов. Доказывается следующее утверждение:

Если задан какой-нибудь метод вышеупомянутого типа, то в любой нормированной ортогональной системе можно изменить порядок функций таким образом, чтобы для полученной новой системы ряд Фурье от любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом суммировался почти всюду данным методом. При этом изменение порядка функций в ортогональной системе зависит только от данного метода и от функций, образующих ортогональную систему, но не зависит от функции $f(x)$, т. е. не зависит от коэффициентов Фурье рассматриваемого ряда Фурье.

§ 1

Как известно, линейные методы суммирования расходящихся рядов определяются следующим образом. Возьмем какой-нибудь бесконечный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1, 1}$$

и бесконечную матрицу

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1k}, & \ldots \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & \ldots, & a_{2k}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}, & a_{i2}, & \ldots & \ldots, & a_{ik}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right. \tag{1, 2}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} s_k, \tag{1, 3}$$

где $s_k = \sum_{n=1}^{k} u_n$. Говорят, что ряд (1, 1) суммируется линейным методом, соответствующим матрице (1, 2), если ряд (1, 3) сходится для всех достаточно больших значений i и имеет сумму, которая стремится к определенному конечному пределу, когда $i \to \infty$ Этот предел называется обобщенной суммой ряда (1, 1).

Линейный метод суммирования называется правильным, если элементы матрицы (1, 2) удовлетворяют условиям:

1°. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ абсолютно сходится для всех значений i, причем

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1.$$

2°. Для всех значений i выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < M,$$

где M не зависит от i.

3°. $$\lim_{k \to \infty} a_{ik} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ 3, \ldots)^{*}.$$

Обозначим через γ_i максимум величин $|a_{ik}|$ $(k = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$ при определенном значении i:

$$\gamma_i = \max_{1 \leqslant k < +\infty} |a_{ik}|. \qquad (1, 4)$$

Мы будем называть линейный метод суммирования методом T', если элементы a_{ik} матрицы (1, 2) удовлетворяют условиям 1°, 2°, а также условию

4°. $$\lim_{i \to \infty} \gamma_i = 0.$$

Ясно, что всякий метод T' есть регулярный метод суммирования, но обратное утверждение не имеет места. Кроме того, легко можно доказать, что методы Cesàro любого положительного порядка являются методами T' ([2]).

Возьмем бесконечную, нормированную систему функций, ортогональных на некотором интервале (a, b), т. е. систему функций

$$\{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots\} = \{\varphi_n(x)\}, \qquad (1, 5)$$

* Определение регулярных методов суммирования принадлежит Toeplitz'у ([1]), который доказал следующую теорему: Чтобы всякий сходящийся ряд суммировался данным линейным методом и имел обобщенную сумму, равную обычной сумме, необходимо и достаточно, чтобы рассматриваемый линейный метод был регулярным.

При определении регулярного метода можно было бы предположить, что условия 1° и 2° выполняются только для всех достаточно больших значений i.

удовлетворяющих условиям:

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases} \quad (1, 6)$$

Такую систему функций мы будем называть для краткости системой *ON* *. Рассмотрим бесконечный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad (1, 7)$$

где c_n — постоянные величины такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty. \quad (1, 8)$$

Для любых постоянных c_n ряд (1, 7) называется рядом по ортогональным функциям. Величины c_n называются коэффициентами ряда (1, 7).

В настоящей работе мы докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА I. *Если задан произвольный линейный метод* T', *то в любой системе ON* (1, 5) *можно изменить порядок функций* $\varphi_n(x)$ *таким образом, чтобы для полученной новой системы*

$$\{\varphi_{\nu_n}(x)\} \quad (1, 9)$$

из условия (1, 8) *следовала суммируемость данным методом ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\nu_n}(x) \quad (1, 10)$$

почти всюду на (a, b).

В этой теореме предполагается, что перестановка функций в системе (1, 5) зависит только от данной системы и от метода T', но не зависит от коэффициентов c_n**.

§ 2

Прежде чем перейти к доказательству теоремы I, формулированной в конце § 1, докажем несколько лемм и одну теорему (теорема II).

* Это обозначение принадлежит Kaczmarz'у и Steinhaus'у ([3]).

** Эта теорема является обобщением одной из теорем, доказанных в упомянутой выше работе ([2]) (теорема 3). Формулировка теоремы следующая:

Если дан произвольный линейный метод T' *и произвольный ряд по ортогональным функциям, коэффициенты которого удовлетворяют условию* (1, 8), *то в этом ряде всегда можно переставить члены таким образом, чтобы полученный новый ряд суммировался рассматриваемым методом почти всюду на* (a, b).

В этой теореме предполагается, что перестановка членов ряда зависит вообще и от функций $\varphi_n(x)$ и от коэффициентов c_n.

ЛЕММА 1. *Предполагая, что* (1, 5) *есть произвольная система* ON, *определенная на интервале* (a, b), *обозначим через* Ω_n *верхнюю границу величин*

$$\left| \sum_{k=\nu}^{\nu'} \alpha_k \int_c^d \varphi_k(x)\, dx \right|,$$

составленных для произвольных интервалов (c, d), *принадлежащих* (a, b), *для произвольных целых положительных чисел* ν, ν', *удовлетворяющих неравенству* $n \leqslant \nu < \nu'$, *и для произвольных действительных чисел* α_k, *удовлетворяющих неравенству*

$$\sum_{k=\nu}^{\nu'} \alpha_k^2 \leqslant 1. \qquad (2, 1)$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = 0. \qquad (2, 2)$$

Доказательство. Возьмем произвольно малое положительное число ε и определим целое положительное число p таким образом, чтобы

$$\frac{b-a}{p} < \frac{\varepsilon^2}{9}. \qquad (2, 3)$$

Положим $a + (b-a)\,\frac{s}{p} = b_s$, откуда на основании (2, 3)

$$0 < b_s - b_{s-1} < \frac{\varepsilon^2}{9} \quad (1 \leqslant s \leqslant p). \qquad (2, 4)$$

Величины $\int_c^d \varphi_n(x)\, dx$ являются коэффициентами Фурье от функции, равной единице на интервале (c, d) и равной нулю вне этого интервала. В таком случае, на основании известной теоремы, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_c^d \varphi_n(x)\, dx \right]^2 \qquad (2, 5)$$

сходится для любых значений c и d, принадлежащих интервалу (a, b). Следовательно, мы будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\int_{b_s}^{b_t} \varphi_k(x)\, dx \right]^2 = 0 \qquad (2, 6)$$

для любых целых чисел s и t, удовлетворяющих неравенствам

$$1 \leqslant s \leqslant p, \quad 1 \leqslant t \leqslant p. \qquad (2, 7)$$

Принимая во внимание равенство (2, 6), мы можем определить такое натуральное число N, что

$$\sum_{k=\nu}^{\nu'} \left[\int_{b_s}^{b_t} \varphi_k(x)\, dx \right]^2 < \frac{\varepsilon^2}{9} \qquad (2, 8)$$

для любых целых чисел ν, ν', удовлетворяющих неравенству $N \leqslant \leqslant \nu < \nu'$, и для любых целых чисел s и t, удовлетворяющих неравенствам (2, 7).

На интервале (a, b) возьмем произвольный интервал (c, d) и подберем целые числа s и t таким образом, чтобы выполнялись неравенства:

$$\left.\begin{array}{ll} b_{s-1} \leqslant c \leqslant b_s, & b_{t-1} \leqslant d \leqslant b_t, \\ 1 \leqslant s \leqslant p, & 1 \leqslant t \leqslant p, \end{array}\right\} \tag{2, 9}$$

откуда на основании (2, 4)

$$0 \leqslant b_s - c < \frac{\varepsilon^2}{9}, \quad 0 \leqslant b_t - d < \frac{\varepsilon^2}{9}. \tag{2, 10}$$

Если α_k — произвольные действительные числа, удовлетворяющие неравенству (2, 1), то на основании неравенства Шварца будем иметь для любого интервала (α, β):

$$\left| \sum_{k=\nu}^{\nu'} \alpha_k \int_\alpha^\beta \varphi_k(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=\nu}^{\nu'} \alpha_k^2 \cdot \sum_{k=\nu}^{\nu'} \left[\int_\alpha^\beta \varphi_k(x)\, dx \right]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=\nu}^{\nu'} \left[\int_\alpha^\beta \varphi_k(x)\, dx \right]^2},$$

откуда, пользуясь очевидным неравенством

$$\left| \sum_{k=\nu}^{\nu'} \alpha_k \int_c^d \varphi_k(x)\, dx \right| \leqslant \left| \sum_{k=\nu}^{\nu'} \alpha_k \int_c^{b_s} \varphi_k(x)\, dx \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=\nu}^{\nu'} \alpha_k \int_{b_s}^{b_t} \varphi_k(x)\, dx \right| + \left| \sum_{k=\nu}^{\nu'} \alpha_k \int_{b_t}^{d} \varphi_k(x)\, dx \right|,$$

получим:

$$\left| \sum_{k=\nu}^{\nu'} \alpha_k \int_c^d \varphi_k(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=\nu}^{\nu'} \left[\int_c^{b_s} \varphi_k(x)\, dx \right]^2} +$$

$$+ \sqrt{\sum_{k=\nu}^{\nu'} \left[\int_{b_s}^{b_t} \varphi_k(x)\, dx \right]^2} + \sqrt{\sum_{k=\nu}^{\nu'} \left[\int_{b_t}^{d} \varphi_k(x)\, dx \right]^2}. \tag{2, 11}$$

Величины $\int_c^{b_s} \varphi_k(x)\, dx$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ являются коэффициентами Фурье от функции, равной единице на интервале (c, b_s) и равной нулю вне этого интервала. Следовательно, на основании неравенства Бесселя будем иметь:

$$\sum_{k-\nu}^{\nu'} \left[\int_c^{b_s} \varphi_k(x)\, dx \right]^2 \leqslant b_s - c \tag{2, 12}$$

и на том же основании

$$\sum_{k=\nu}^{\nu'} \Big[\int_{b_t}^{d} \varphi_k(x)\,dx \Big]^2 \leqslant b_t - d. \qquad (2, 13)$$

Сопоставляя (2, 11), (2, 8), (2, 12), (2, 13) и (2, 10), получим окончательно

$$\Big| \sum_{k=\nu}^{\nu'} \alpha_k \int_{c}^{d} \varphi_k(x)\,dx \Big| < \varepsilon$$

для любых целых чисел ν, ν', удовлетворяющих неравенству $N \leqslant \leqslant \nu < \nu'$, для любого интервала (c, d), лежащего на (a, b), и для любых действительных чисел α_k, удовлетворяющих неравенству (2, 1). В таком случае на основании определения величины Ω_n будем иметь:

$$\Omega_n < \varepsilon \quad (n > N).$$

Так как положительное число ε можно взять сколь угодно малым, то отсюда получается равенство (2, 2).

Ч. Т. Д.

ЛЕММА 2. *Если $\{\varphi_n(x)\}$ есть какая-нибудь бесконечная система ON, то всегда можно определить натуральные числа m_k, положительные числа δ_k и множества E_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, которые удовлетворяют следующим условиям:*

A°. $E_k \subset (a, b)$, $\operatorname{mes} E_k > b - a - \frac{1}{k^2} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$,

B°. $$\Big| \frac{1}{\delta_k} \int_{x}^{x+\delta_k} \varphi_n(t)\,dt - \varphi_n(x) \Big| < \frac{1}{k^2 m_{k-1}}$$
$$(1 \leqslant n \leqslant m_{k-1}, \;\; x \subset E_k, \;\; k > 1),$$

C°. $\delta_k < \delta_{k-1}, \;\; \delta_k < \frac{1}{k} \qquad (k > 1)$,

D°. $m_1 = 1, \;\; m_k > m_{k-1} \qquad (k > 1)$,

E°. $\Omega_{m_k} < \frac{\delta_k}{2^k} \qquad (k > 1)$.

Доказательство. В силу известной теоремы Lebesque'а равенство

$$\frac{d}{dx} \int_{a}^{x} \varphi_n(t)\,dt = \varphi_n(x)$$

выполняется почти всюду на (a, b), а в таком случае, на основании теоремы Егорова ([4]), функция $\frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} \varphi_n(t)\,dt$ независимого переменного x стремится равномерно к $\varphi_n(x)$ при $h \to 0$ на некотором множестве $E \subset (a, b)$, меру которого можно считать сколь угодно

близкой к $b-a$. Следовательно, для всякого натурального числа m и для всякого положительного числа ε можно определить множество G, лежащее на (a, b), и положительное число δ, которые удовлетворяют условиям:

$$\left| \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} \varphi_n(t)\,dt - \varphi_n(x) \right| < \varepsilon \quad (1 \leqslant n \leqslant m,\ x \subset G), \tag{2, 14}$$

$$\operatorname{mes} G > b - a - \varepsilon. \tag{2, 15}$$

В этих равенствах число δ можно считать как угодно малым. Кроме того, можно предположить, что для $x \subset G$ соответствующие точки $x+\delta$ лежат на интервале (a, b)

Положим

$$m_1 = 1,\ E_1 = (a, b),\ \delta_1 = b - a.$$

Предполагая теперь, что числа m_{k-1}, δ_{k-1} и множества E_{k-1} уже определены, и пользуясь условиями (2, 14), (2, 15), в которых полагаем $\varepsilon = \frac{1}{k^2}$, $m = m_{k-1}$, мы можем определить множество E_k и положительное число δ_k, которые удовлетворяют условиям A° и B°. При этом число δ_k можно взять настолько малым, чтобы выполнялось условие C°.

В силу леммы 1 имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = 0$$

и, следовательно, можно определить такое натуральное число m_k, чтобы выполнялись условия D° и E°.

Мы видим таким образом, что для любого значения k можно определить числа δ_k, m_k и множества E_k, которые удовлетворяют всем условиям A°, B°, C°, D° и E°.

Ч. Т. Д.

Введем следующее определение. Будем называть какую-нибудь систему *ON* функций $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ системой сходимости, если из условия (1, 8) всегда следует сходимость ряда (1, 7) почти всюду на (a, b). Докажем лемму, устанавливающую достаточные условия для того, чтобы какая-нибудь система *ON* была системой сходимости.

ЛЕММА 3. *Система ON функций* $\Phi_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, *определенных на* (a, b), *есть система сходимости, если можно определить положительные числа* σ_k *и множества* e_k, *которые удовлетворяют следующим условиям:*

1°. $e_k \subset (a, b)$, $\operatorname{mes} e_k > b - a - \frac{1}{k^2}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$,

2°. $\sigma_k < \sigma_{k-1}$, $\sigma_k < \frac{1}{k}$ $(k > 1)$,

3°. $$\left|\frac{1}{\sigma_k}\int\limits_x^{x+\sigma_k}\Phi_s(t)\,dt-\Phi_s(x)\right|<\frac{1}{k^2}\quad(1\leqslant s\leqslant k-1,\ x\subset e_k,\ k>1),$$

4°. $$\omega_k<\frac{\sigma_k}{2^k}\quad(k>1),$$

где ω_k *есть максимум велл ин* $\left|\int\limits_c^d\Phi_k(t)\,dt\right|$ *для всевозможных интервалов* (c, d), *лежащv ла* (a, b).

Доказательств Возьмем какие-нибудь действительные постоянные величины C_k, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_k^2<+\infty. \tag{2,16}$$

Чтобы доказать лемму, достаточно показать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_k\Phi_k(x) \tag{2,17}$$

сходится почти всюду на (a, b).

Так как условие (2, 16) выполняется, то на основании известной теоремы ряд (2, 17) сходится в среднем на (a, b) к некоторой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом, т. е.

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_a^b[f(t)-S_k(t)]^2\,dt=0, \tag{2,18}$$

где

$$S_k(x)=\sum_{s=1}^{k}C_s\Phi_s(x)\ *.$$

Мы докажем, что ряд (2, 17) сходится почти всюду на (a, b) к функции $f(x)$.

Если (α, β) есть произвольный интервал, лежащий на (a, b), то

$$\left|\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt-\int\limits_\alpha^\beta S_k(t)\,dt\right|\leqslant\sqrt{(\beta-\alpha)\int\limits_\alpha^\beta[f(t)-S_k(t)]^2\,dt},$$

откуда на основании (2, 18):

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_\alpha^\beta S_k(t)\,dt=\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt. \tag{2,19}$$

Положим

$$e=\liminf_{k\to\infty}e_k. \tag{2,20}$$

Из условия 1° следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\text{mes}\,Ce_k<+\infty,$$

* См. лит. (5) и (6).

где Ce_k есть множество, дополнительное к e_k относительно интервала (a, b). В таком случае

$$\text{mes } Ce = \text{mes} \limsup_{k\to\infty} Ce_k = 0\,*$$

и, следовательно,

$$\text{mes}\, e = b - a. \tag{2, 21}$$

Обозначим через e' множество точек x на интервале (a, b), в которых имеет место равенство

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{2, 22}$$

Известно, что

$$\text{mes}\, e' = b - a$$

и, следовательно, на основании (2, 21)

$$\text{mes}\,(e, e') = b - a, \tag{2, 23}$$

где (e, e') есть общая часть множеств e и e'.

Мы докажем, что ряд (2, 17) сходится к функции $f(x)$ во всех точках множества (e, e'). Предполагая, что x есть какая-нибудь точка множества (e, e'), будем иметь: $x \subset e$, $x \subset e'$. В таком случае, принимая во внимание определение множества e [равенство (2, 20)], мы можем утверждать, что существует натуральное число k_x такое, что $x \subset e$ для всех значений $k > k_x$. Число k_x зависит вообще от x.

Если $k > k_x$, то $x \subset e_{k+1}$ и, следовательно, на основании условия 3°:

$$\left|\frac{1}{\sigma_{k+1}}\int\limits_x^{x+\sigma_{k+1}} \Phi_s(t)\,dt - \Phi_k(x)\right| < \frac{1}{(k+1)^2} \quad (1 \leqslant s \leqslant k). \tag{2, 24}$$

Полагая

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2, \tag{2, 25}$$

будем иметь:

$$|C_k| \leqslant \sqrt{A} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2, 26}$$

откуда на основании (2, 24):

$$\left|\frac{1}{\sigma_{k+1}}\int\limits_x^{x+\sigma_{k+1}} S_k(t)\,dt - S_k(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k} |C_s| \cdot \left|\frac{1}{\sigma_{k+1}}\int\limits_x^{x+\sigma_{k+1}} \Phi_s(t)\,dt - \Phi_s(x)\right| < \frac{\sqrt{A}}{k+1} \quad (k > k_x). \tag{2, 27}$$

---

* Это равенство получается непосредственно из очевидного неравенства

$$\text{mes} \limsup_{k\to\infty} Ce_k \leqslant \sum_{k=j}^{\infty} \text{mes}\, Ce_k \quad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Принимая во внимание равенство (2, 19), мы можем определить натуральное число $l > k$, вообще зависящее от x и k, для которого выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{\sigma_{k+1}} \int_{x}^{x+\sigma_{k+1}} f(t)\,dt - \frac{1}{\sigma_{k+1}} \int_{x}^{x+\sigma_{k+1}} S_l(t)\,dt \right| < \frac{1}{k}. \tag{2, 28}$$

Кроме того, из неравенства (2, 26) следует, что

$$\left| \frac{1}{\sigma_{k+1}} \int_{x}^{x+\sigma_{k+1}} S_l(t)\,dt - \frac{1}{\sigma_{k+1}} \int_{x}^{x+\sigma_{k+1}} S_k(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma_{k+1}} \sum_{s=k+1}^{l} |C_s| \cdot \left| \int_{x}^{x+\sigma_{k+1}} \Phi_s(t)\,dt \right| \leqslant \frac{\sqrt{A}}{\sigma_{k+1}} \sum_{s=k+1}^{l} \left| \int_{x}^{x+\sigma_{k+1}} \Phi_s(t)\,dt \right|,$$

откуда на основании условий 2°, 4° и определения величин ω_k:

$$\left| \frac{1}{\sigma_{k+1}} \int_{x}^{x+\sigma_{k+1}} S_l(t)\,dt - \frac{1}{\sigma_{k+1}} \int_{x}^{x+\sigma_{k+1}} S_k(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{A}}{\sigma_{k+1}} \sum_{s=k+1}^{l} \omega_s \leqslant \frac{\sqrt{A}}{\sigma_{k+1}} \sum_{s=k+1}^{l} \frac{\sigma_s}{2^s} \leqslant \frac{\sqrt{A}}{2^k}. \tag{2, 29}$$

Сопоставляя (2, 27), (2, 28) и (2, 29), получаем неравенство:

$$\left| \frac{1}{\sigma_{k+1}} \int_{x}^{x+\sigma_{k+1}} f(t)\,dt - S_k(x) \right| < \frac{2\sqrt{A}+1}{k} \quad (k > k_x). \tag{2, 30}$$

Из условия 2° следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{k+1} = 0. \tag{2, 31}$$

Так как $x \subset e'$, то из равенств (2, 31) и (2, 22) получаем:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sigma_{k+1}} \int_{x}^{x+\sigma_{k+1}} f(t)\,dt = f(x),$$

откуда на основании (2, 30):

$$\lim_{k\to\infty} S_k(x) = f(x). \tag{2, 32}$$

Последнее равенство выполняется в любой точке x множества (e, e'), т. е. ряд (2, 17) сходится и имеет сумму $f(x)$ во всех точках этого множества. В таком случае из равенства (2, 23) следует, что ряд (2, 17) сходится почти всюду на (a, b).

Ч. Т. Д.

Принимая во внимание леммы 2 и 3, мы можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА II*. *В любой бесконечной системе ON* $\{\varphi_n(x)\}$ *содержится бесконечная система сходимости* $\{\varphi_{m_k}(x)\}$, $m_{k-1} < m_k$.

* Доказательство этой теоремы дано также в упомянутой выше работе ([2]).

Доказательство. Возьмем какую-нибудь бесконечную систему ON функций $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, определенных на некотором интервале (a, b). На основании леммы 2 мы можем определить натуральные числа m_k, положительные числа δ_k и множества E_k, которые удовлетворяют условиям A°, B°, C°, D° и E° этой леммы.

Из определения величин Ω_n следует, что

$$\omega_n' \leqslant \Omega_n; \quad (n=1, 2, 3, \ldots), \tag{2, 33}$$

где ω_n' есть максимум величин $\left|\int\limits_c^d \varphi_n(t)\,dt\right|$ для всевозможных интервалов (c, d), лежащих на (a, b). В таком случае, сопоставляя (2, 33) с условием E_0, будем иметь:

$$\omega_{m_k}' < \frac{\delta_k}{2^k} \quad (k>1). \tag{2, 34}$$

Кроме того, из условия B° получаем:

$$\left.\begin{array}{c}\left|\dfrac{1}{\delta_k}\int\limits_x^{x+\delta_k}\varphi_{m_s}(t)\,dt-\varphi_{m_s}(x)\right|<\dfrac{1}{k^2 m_{k-1}}<\dfrac{1}{k^2}\\ (1\leqslant s\leqslant k-1,\ x\subset E_k,\ k>1).\end{array}\right\} \tag{2, 35}$$

Неравенства (2, 34), (2, 35) и условия A°, C° показывают, что функции $\varphi_{m_k}(x)$, числа δ_k и множества E_k удовлетворяют всем условиям, которым должны удовлетворять функции $\Phi_k(x)$, числа σ_k и множества e_k в лемме 3. Следовательно, на основании этой леммы функции $\varphi_{m_k}(x)$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ образуют систему сходимости. Так как $m_{k-1}<m_k$ (условие D°), то теорема доказана.

§ 3

ЛЕММА 4*. *Для любой системы ON $\{\varphi_n(x)\}$ можно определить бесконечную последовательность натуральных чисел m_k $(m_k<m_{k+1}$, $k=1, 2, 3, \ldots)$ такую, что при $k\to\infty$ сумма*

$$\sum_{n=1}^{m_k} c_n\varphi_n(x) \tag{3, 1}$$

стремится почти всюду на (a, b) к конечному пределу, какова бы ни была последовательность действительных чисел c_n $(n=1, 2, 3\ldots)$, удовлетворяющих условию (1, 8):

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty.$$

* Когда эта работа находилась в печати, я узнал, что лемма 4 уже была доказана J. Marcinkiewicz'ем [7]. Теорема II является непосредственным следствием леммы 4.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность действительных чисел c_n $(n = 1, 2, 3\ldots)$, удовлетворяющих условию (1, 8), и положим

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} c_n \varphi_n(x). \qquad (3, 2)$$

Лемма 4 будет доказана, если мы определим последовательность натуральных чисел m_k $(m_k < m_{k+1},\ k = 1, 2, 3, \ldots)$, зависящих только от системы $\{\varphi_n(x)\}$ и таких, что

$$\lim_{k\to\infty} S_{m_k}(x) \qquad (3, 3)$$

существует и имеет конечную величину почти всюду на (a, b).

Для системы $\{\varphi_n(x)\}$ мы можем определить на основании леммы 2 (§ 2) натуральные числа m_k, положительные числа δ_k и множества E_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, которые удовлетворяют всем условиям A°, B°, C°, D° и E° этой леммы. Мы докажем, что для полученной последовательности чисел m_k предел (3, 3) существует и имеет конечную величину почти всюду на (a, b).

Положим

$$A_k = \sqrt{\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} c_n^2} \qquad (3, 4)$$

и определим величины α_n следующим образом:

если

$$m_k < n \leqslant m_{k+1} \text{ и } A_k \neq 0,$$

то

$$\alpha_n = \frac{c_n}{A_k}; \qquad (3, 5)$$

если же

$$m_k < n \leqslant m_{k+1} \text{ и } A_k = 0,$$

то

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{m_{k+1} - m_k}}. \qquad (3, 6)$$

Величины α_n определены для всех значений $n_1 > m_1$, т. е. для всех значений $n > 1$, так как $m_1 = 1$ в силу условия D°. При этом из равенств (3, 5) и (3, 6) следует, что

$$\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} \alpha_n^2 = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (3, 7)$$

Рассмотрим функции:

$$\psi_k(x) = \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} \alpha_n \varphi_n(x). \qquad (3, 8)$$

Так как, по предположению, функции $\varphi_n(x)$ образуют систему ON, то из равенства (3, 7) следует, что функции $\psi_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ образуют такую же систему.

Принимая во внимание определение величин A_k, мы видим, что $c_n = 0$, если $m_k < n \leqslant m_{k+1}$ и $A_k = 0$. Так как $m_1 = 1$, то на основании (3, 5) и (3, 8) имеем:

$$\sum_{s=1}^{k-1} A_s \psi_s(x) = \sum_{s=1}^{k-1} A_s \sum_{n=m_s+1}^{m_{s+1}} a_n \varphi_n(x) =$$
$$= \sum{}' \sum_{n=m_s+1}^{m_{s+1}} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=2}^{m_k} c_n \varphi_n(x) =$$
$$= S_{m_k}(x) - c_1 \varphi_1(x), \tag{3, 9}$$

где $\sum'$ означает сумму, распространенную на все индексы $s \leqslant \leqslant k-1$, для которых $A_s \neq 0$. Из равенства (3, 9) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} S_{m_k}(x)$ существует и имеет конечную величину в любой точке x, в которой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \psi_k(x) \tag{3,10}$$

сходится. Поэтому для доказательства леммы 4 достаточно показать, что ряд (3, 10) сходится почти всюду на интервале (a, b).

Принимая во внимание определение величин A_k, мы получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} c_n^2 = \sum_{n=2}^{\infty} c_n^2,$$

откуда следует на основании (1, 8), что

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 < +\infty. \tag{3,11}$$

В таком случае сходимость почти всюду на (a, b) ряда (3, 10) будет доказана, если мы покажем, что система функций $\psi_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ есть система сходимости.

Для доказательства этого последнего утверждения, очевидно, достаточно показать, что каждая из систем $\{\psi_{2l}(x)\}$ $(l = 1, 2, 3, \ldots)$ и $\{\psi_{2l-1}(x)\}$ является системой сходимости.

Обозначим через ω_k'' максимум величин $\left|\int\limits_c^d \psi_k(x)\,dx\right|$ для любых значений c и d на интервале (a, b). Из определения величин Ω_n и из равенств (3, 7), (3, 8) следует, что

$$\left|\int_c^d \psi_k(x)\,dx\right| = \left|\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n \int_c^d \varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant \Omega_{m_k}$$

для любых значений c и d на интервале (a, b), откуда

$$\omega_k'' \leqslant \Omega_{m_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3, 12}$$

Возьмем положительные числа δ_k и множества E_k, которые были определены одновременно с числами m_k. Чтобы доказать, что система $\{\psi_{2l}(x)\}$ $(l=1, 2, 3, \ldots)$ есть система сходимости, достаточно показать, что функции $\psi_{2l}(x)$, числа δ_{2l} и множества E_{2l} удовлетворяют всем условиям 1°, 2°, 3°, 4° леммы 3 (§ 2), если их подставить в эти условия на место $\Phi_k(x)$, σ_k и e_k.

Числа m_k, δ_k и множества E_k у нас были определены таким образом, чтобы для них выполнялись все условия A°, B°, C°, D° и E°, перечисленные в формулировке леммы 2. На основании условия B° этой леммы имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{1}{\delta_{2l}}\int_x^{x+\delta_{2l}}\varphi_n(t)\,dt-\varphi_n(x)\right|<\frac{1}{(2l)^2\cdot m_{2l-1}} \\ &(1\leqslant n\leqslant m_{2l-1},\ x\subset E_{2l},\ l=1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (3, 13)$$

Далее, из равенства (3, 7) следует, что $|\alpha_n|\leqslant 1$ для $n>1$, откуда на основании (3, 13) и (3, 8):

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{1}{\delta_{2l}}\int_x^{x+\delta_{2l}}\psi_{2r}(t)\,dt-\psi_{2r}(x)\right|\leqslant \\ &\leqslant\sum_{n=m_{2r}+1}^{m_{2r+1}}|\alpha_n|\cdot\left|\frac{1}{\delta_{2l}}\int_x^{x+\delta_{2l}}\varphi_n(t)\,dt-\varphi_n(x)\right|\leqslant\frac{m_{2r+1}}{4l^2\,m_{2l-1}} \\ &(1\leqslant r\leqslant l-1,\ x\subset E_{2l},\ l=1, 2, 3,\ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (3, 14)$$

Из определения чисел m_k (условие D° леммы 2) следует, что $m_{2r+1}\leqslant m_{2l-1}$, если $1\leqslant r\leqslant l-1$, откуда на основании (3, 14):

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{1}{\delta_{2l}}\int_x^{x+\delta_{2l}}\psi_{2r}(t)\,dt-\psi_{2r}(x)\right|<\frac{1}{l^2} \\ &(1\leqslant r\leqslant l-1,\ x\subset E_{2l},\ l=1, 2, 3, \ldots), \end{aligned}\right\} \qquad (3, 15)$$

т. е. мы получили условие 3° леммы 3.

Принимая во внимание неравенство (3, 12) и условие E° леммы 2, получаем:

$$\omega''_{2l}\leqslant\Omega_{m_{2l}}<\frac{\delta_{2l}}{2^{2l}}<\frac{\delta_{2l}}{2^l}, \qquad (3, 16)$$

откуда заключаем, на основании определения величин ω''_k, что условие 4° леммы 3 также выполняется. Наконец, из условий A° и C° леммы 2 получаем:

$$\left.\begin{aligned} &E_{2l}\subset(a, b),\ \text{mes}\,E_{2l}>b-a-\frac{1}{(2l)^2}>b-a-\frac{1}{l^2} \\ &(l=1, 2, 3, \ldots), \end{aligned}\right\} \qquad (3, 17)$$

$$\delta_{2l}<\delta_{2l-1}<\delta_{2(l-1)},\quad \delta_{2l}<\frac{1}{2l}<\frac{1}{l}\qquad (l>1), \qquad (3, 18)$$

т. е. мы получаем условия 1° и 2° леммы 3.

Мы видим, таким образом, что функции $\psi_{2l}(x)$, числа m_{2l}, δ_{2l} и множества E_{2l} удовлетворяют всем условиям леммы 3 и, следовательно, на основании этой леммы система $\{\psi_{2l}(x)\}$ $(l=1, 2, 3, \ldots)$ есть система сходимости. Рассуждая таким же образом, можно доказать, что система $\{\psi_{2l-1}(x)\}$ $(l=1, 2, 3, \ldots)$ обладает тем же свойством. В таком случае $\{\psi_k(x)\}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ является системой сходимости и, следовательно, ряд (3, 10) сходится почти всюду на (a, b), а тогда предел (3, 3) существует и имеет конечную величину почти всюду на (a, b). Так как числа m_k зависят только от системы $\{\varphi_n(x)\}$ и так как $m_k < m_{k+1}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$, то лемма 4 доказана.

§ 4

Доказательство теоремы I (§ 1). Возьмем произвольную систему *ON* функций $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, определенных на некотором интервале (a, b). На основании теоремы II, доказанной в § 2, мы можем определить возрастающую последовательность натуральных чисел m_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$, зависящих только от функций $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ и таких, что система $\{\varphi_{m_k}(x)\}$ является системой сходимости. Обозначим через ρ_l $(l=1, 2, 3, \ldots)$ все натуральные числа, перенумерованные в возрастающем порядке, которые отличны от чисел m_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$. Рассмотрим бесконечный ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} b_l \varphi_{\rho_l}(x), \tag{4, 1}$$

где b_l — произвольные действительные постоянные числа, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{l=1}^{\infty} b_l^2 < +\infty. \tag{4, 2}$$

Положим

$$\tau_l(x) = \sum_{s=1}^{l} b_s \varphi_{\rho_s}(x). \tag{4, 3}$$

На основании леммы 4 (§ 3) мы можем определить возрастающую последовательность натуральных чисел l_j $(j=1, 2, 3, \ldots)$, зависящих только от функций $\varphi_{\rho_l}(x)$ и таких, что $\lim\limits_{j\to\infty}\tau_{l_j}(x)$ существует и имеет конечную величину почти всюду на (a, b), каковы бы ни были постоянные числа b_l, удовлетворяющие условию (4, 2). Последовательность чисел l_j зависит только от функций $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, так как числа ρ_l зависят только от этих функций.

Так как каждая из функций $\varphi_n(x)$ конечна почти всюду на (a, b), то для любого значения j мы можем определить положительное число L_j и множество G_j, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$L_j < L_{j+1},\ j < L_j,\ l_j \max_{1 \leqslant s \leqslant l_j} |\varphi_{\rho_s}(x)| < \frac{L_j}{2} \qquad (x \subset G_j), \tag{4, 4}$$

$$G_j \subset (a, b),\ \operatorname{mes} G_j > b - a - \frac{1}{j^2}. \tag{4, 5}$$

Ясно, что числа L_j и множества G_j зависят только от функций $\varphi_n(x)$.

Рассмотрим теперь какой-нибудь определенный линейный метод T', соответствующий некоторой матрице (1, 2). В дальнейшем мы будем обозначать этот метод через T'_0. Мы докажем, что в системе $\{\varphi_n(x)\}$ можно изменить порядок функций $\varphi_n(x)$ таким образом, чтобы для полученной новой системы (1, 9)

$$\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$$

из условия (1, 8)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty$$

следовала суммируемость методом T'_0 ряда (1, 10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\nu_n}(x)$$

почти всюду на (a, b). При этом изменение порядка функций $\varphi_n(x)$, которое мы выполним, будет зависеть только от этих функций и от метода T'_0, но не будет зависеть от коэффициентов c_n.

Положим

$$\gamma'_i = \max_{i \leqslant s \leqslant +\infty} \gamma_s, \tag{4, 6}$$

где γ_i есть величина, определяемая из соотношения (1, 4). Принимая во внимание условие 4° (определение методов T'), мы получаем:

$$\lim_{i \to \infty} \gamma'_i = 0. \tag{4, 7}$$

Определим две последовательности натуральных чисел λ_j и μ_j ($j = 1, 2, 3, \ldots$) следующим образом. Положим прежде всего $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Предполагая затем, что числа λ_{j-1} и μ_{j-1} уже определены, и принимая во внимание равенство (4, 7), мы определим настолько большое натуральное число λ_j, чтобы выполнялись неравенства:

$$\lambda_{j-1} < \lambda_j,\ \gamma'_{\lambda_j} \cdot L_j \cdot \mu_{j-1} < \frac{1}{j}. \tag{4, 8}$$

На основании условия 2° (определение методов T') ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|$

сходится для всех значений i. В таком случае, предполагая число λ_j уже фиксированным, мы можем определить настолько большое натуральное число μ_j, чтобы выполнялись неравенства:

$$\mu_{j-1} + l_{j+1} < \mu_j, \quad L_j \cdot \delta_j < \frac{1}{2^j}, \tag{4, 9}$$

где

$$\delta_j = \max_{1 \leqslant i \leqslant \lambda_j} \sum_{k=\mu_j}^{\infty} a_{ik}. \tag{4, 10}$$

Начиная с чисел $\mu_1 = \lambda_1 = 0$, мы можем определить, таким образом, натуральные числа λ_j и μ_j для всех значений $j = 1, 2, 3, \ldots$ При этом неравенства (4, 8), (4, 9) и равенство (4, 10) выполняются для всех значений $j > 1$. Ясно, что числа λ_j и μ_j зависят только от функций $\varphi_n(x)$ и от метода T_0'.

Полагая

$$l_0 = 0, \ \mu_j' = \mu_j + l_j - l_{j-1} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4, 11}$$

получаем из неравенства $l_{j-1} < l_j$ и из первого неравенства (4, 9):

$$\mu_j < \mu_j' < \mu_{j+1} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4, 12}$$

Кроме того, принимая во внимание равенство $l_0 = 0$, имеем:

$$\sum_{t=1}^{j} (\mu_t' - \mu_t) = l_{j-1} + \mu_j' - \mu_j = l_j. \tag{4, 13}$$

Определим теперь последовательность натуральных чисел

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_n, \ldots \tag{4, 14}$$

следующим образом. Если n удовлетворяет одному из неравенств

$$\mu_j < n \leqslant \mu_j' \quad (j = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4, 15}$$

то мы положим

$$\nu_n = \rho_l, \tag{4, 16}$$

где

$$l = l_{j-1} + n - \mu_j, \tag{4, 17}$$

т. е. если n возрастает, принимая последовательно все значения, удовлетворяющие неравенствам (4, 15), то соответствующее значение ν_n принимает в возрастающем порядке все значения, содержащиеся в последовательности

$$\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_l < \ldots \tag{4, 18}$$

Далее, если n удовлетворяет одному из неравенств

$$\mu_j' < n \leqslant \mu_{j+1} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4, 19}$$

то мы положим

$$\nu_n = m_k, \tag{4, 20}$$

где

$$k = \sum_{t=1}^{j-1} (\mu_{t+1} - \mu_t') + n - \mu_j', \tag{4, 21}$$

т. е. если n возрастает, принимая последовательно все значения, удовлетворяющие неравенствам (4, 19), то соответствующее значение ν_n принимает в возрастающем порядке все значения, находящиеся в последовательности

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots \tag{4, 22}$$

Так как $\mu_1 = 0$, то числа ν_n определены для всех значений $n = 1, 2, 3, \ldots$, причем каждое целое положительное число встречается в последовательности (4, 14) один и только один раз, т. е. последовательность (4, 14) получается перестановкой членов из последовательности натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ При этом очевидно, что числа ν_n зависят только от функций $\varphi_n(x)$ и от метода T_0'.

Возьмем ряд (1, 10), где c_n — какие-нибудь постоянные числа, удовлетворяющие условию (1, 8). Для доказательства теоремы I достаточно показать, что данный ряд суммируется методом T_0' почти всюду на (a, b). Не уменьшая общности теоремы, мы можем при этом предположить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = 1. \tag{4, 23}$$

Положим

$$c_n' = c_n, \quad c_n'' = 0, \tag{4, 24}$$

если n удовлетворяет одному из неравенств (4, 15), и

$$c_n' = 0, \quad c_n'' = c_n, \tag{4, 25}$$

если n удовлетворяет одному из неравенств (4, 19). В таком случае

$$c_n = c_n' + c_n'' \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4, 26}$$

Мы докажем, что каждый из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n' \varphi_{\nu_n}(x) \tag{4, 27}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n'' \varphi_{\nu_n}(x) \tag{4, 28}$$

суммируется данным методом T_0' почти всюду на (a, b). Отсюда будет следовать, что ряд (1, 10) обладает тем же свойством.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_{m_k}(x), \tag{4, 29}$$

где $\alpha_k = c_n$, причем n определяется из равенства (4, 21). Сопоставляя равенства (4, 24), (4, 25) и (4, 20), мы видим, что ряд

(4, 28) получается из ряда (4, 29), если к этому последнему ряду добавить некоторые члены, равные нулю. При этом из равенства (4, 23) следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leqslant 1. \tag{4, 30}$$

Мы знаем, что функции $\varphi_{m_k}(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ образуют систему сходимости. В таком случае, принимая во внимание (4, 30), мы заключаем, что ряд (4, 29) и следовательно, ряд (4, 28) сходится почти всюду на (a, b). Так как всякий метод T' есть регулярный метод суммирования, то отсюда следует, что ряд (4, 28) суммируется методом T_0' почти всюду на (a, b).

Докажем теперь, что ряд (4, 27) суммируется почти всюду на $a, b)$ данным методом T_0'. Полагая

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} c_n' \varphi_{\nu_n}(x), \tag{4, 31}$$

мы получаем на основании (4, 24) и (4, 25):

$$S_k(x) = \sum_{t=1}^{j-1} \sum_{n=\mu_t+1}^{\mu'_t} c_{\nu_n} \varphi_{\nu_n}(x) + \sum_{n=\mu_j+1}^{k} c_{\nu_n} \varphi_{\nu_n}(x) \quad (\mu_j < k \leqslant \mu_j'), \tag{4, 32}$$

$$S_k(x) = \sum_{t=1}^{j} \sum_{n=\mu_t+1}^{\mu'_t} c_{\nu_n} \varphi_{\nu_n}(x) \quad (\mu_j' < k \leqslant \mu_{j+1}). \tag{4, 33}$$

Если k удовлетворяет неравенству $\mu_j < k \leqslant \mu_j'$, то, принимая во внимание (4, 13), мы получаем:

$$l_{j-1} < l_{j-1} + k - \mu_j \leqslant l_{j-1} + \mu_j' - \mu_j = l_j. \tag{4, 34}$$

Кроме того, если n удовлетворяет неравенству $\mu_t < n \leqslant \mu_t'$ [неравенство (4, 15)] и s определяется из равенства $s = l_{t-1} + n - \mu_t$, то $\nu_n = \rho_s$ [равенства (4, 16) и (4, 17)]. В таком случае равенства (4, 32) и (4, 33) можно переписать в следующем виде:

$$S_k(x) = \sum_{t=1}^{j-1} \sum_{s=l_{t-1}+1}^{l_t} c_{\rho_s} \varphi_{\rho_s}(x) + \sum_{s=l_{j-1}+1}^{l} c_{\rho_s} \varphi_{\rho_s}(x) \quad (\mu_j < k \leqslant \mu_j'), \tag{4, 35}$$

где $l = l_{j-1} + k - \mu_j$,

$$S_k(x) = \sum_{t=1}^{j} \sum_{s=l_{t-1}+1}^{l_t} c_{\rho_s} \varphi_{\rho_s}(x) \quad (\mu_j' < k \leqslant \mu_{j+1}). \tag{4, 36}$$

Положим

$$Z_l(x) = \sum_{s=1}^{l} c_{\rho_s} \varphi_{\rho_s}(x), \tag{4, 37}$$

откуда на основании (4, 35) и (4, 36):

$$S_k(x) = Z_l(x) \quad (\mu_j < k \leqslant \mu_j', \; l = l_{j-1} + k - \mu_j), \tag{4, 38}$$

$$S_k(x) = Z_l(x) \quad (\mu_j' < k \leqslant \mu_{j+1}). \tag{4, 39}$$

Из равенства (4, 23) следует, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_{\rho_l}^2 \leqslant 1, \tag{4, 40}$$

а в таком случае, принимая во внимание определение чисел l_j*, мы можем утверждать, что $\lim_{j\to\infty} Z_{l_j}(x)$ существует и имеет конечную величину $\psi(x)$ для всех значений x на (a, b) за исключением, быть может, множества меры нуль, т. е.

$$\lim_{j \to \infty} Z_{l_j}(x) = \psi(x) \tag{4, 41}$$

для всех значений x, принадлежащих некоторому множеству E, где

$$E \subset (a, b),\ \operatorname{mes} E = b - a. \tag{4, 42}$$

На основании (4, 40) и (4, 41) ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_{\rho_l}\varphi_{\rho_l}(x) \tag{4, 43}$$

сходится в среднем к функции $\psi(x)$, причем $\psi(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом на (a, b)**. Тогда

$$\lim_{l\to\infty} \int_a^b [Z_l(x) - \psi(x)]^2\, dx = 0$$

и, следовательно,

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_{\rho_l}^2 = \int_a^b [\psi(x)]^2\, dx,$$

откуда на основании (4, 40)

$$\int_a^b [\psi(x)]^2\, dx \leq 1. \tag{4, 44}$$

Возьмем числа L_j, которые были определены выше [см. неравенства (4, 4)], и обозначим через G'_j $(j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ множество точек x на (a, b), для которых выполняется неравенство:

$$|\psi(x)| < \frac{L_j}{2}. \tag{4, 45}$$

Сопоставляя (4, 44) и (4, 45), имеем:

$$\operatorname{mes} G'_j \geqslant b - a - \frac{4}{L_j^2},$$

---

* Числа l_j были введены при рассмотрении суммы (4, 3).

** В самом деле, ряд (4, 43) сходится в среднем на интервале (a, b) к некоторой функции с интегрируемым квадратом, т. е. последовательность функций $Z_l(x)$ $(l = 1, 2, 3, \ldots)$ сходится в среднем к этой функции. Но последовательность функций $Z_{l_j}(x)$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ сходится почти всюду на (a, b) в обычном смысле к функции $\psi(x)$; следовательно, ряд (4, 43) должен сходиться в среднем к функции $\psi(x)$, причем эта функция должна быть с интегрируемым квадратом.

откуда на основании второго неравенства (4, 4):

$$\operatorname{mes} \dot{G}'_j \geqslant b - a - \frac{4}{j^2} \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{4, 46}$$

Обозначим через G''_j общую часть множеств G_j и G'_j, где G_j есть множество, которое было определено одновременно с числами L_j [см. (4, 4) и (4, 5)], т. е.

$$G''_j = (G_j, G'_j). \tag{4, 47}$$

Принимая во внимание (4, 5) и (4, 46), получаем:

$$\operatorname{mes} CG''_j < \frac{5}{j^2}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{mes} \limsup_{j\to\infty} CG''_j = 0.$$

В таком случае, полагая

$$\liminf_{j\to\infty} G''_j = G, \tag{4, 48}$$

будем иметь:

$$G \subset (a, b),\ \operatorname{mes} G = b - a. \tag{4, 49}$$

Из равенства (4, 23) получаем

$$|c_n| \leqslant 1$$

и, следовательно, на основании равенства (4, 37) будем иметь для $x \subset G''_j$:

$$\max_{1\leqslant l\leqslant l_j} \Big[|Z_l(x)| + |\psi(x)| \Big] \leqslant \sum_{s=1}^{l_j} |c_{\rho_s}| \cdot |\varphi_{\rho_s}(x)| + |\psi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant l_j \max_{1\leqslant s\leqslant l_j} |\varphi_{\rho_s}(x)| + |\psi(x)|.$$

В таком случае, принимая во внимание равенство (4, 17) и определение множеств G_j, G'_j [см. (4, 4) и (4, 45)], будем иметь:

$$\max_{1\leqslant l\leqslant l_j} [\,|Z_l(x)| + |\psi(x)|\,] < L_j \quad (x \subset G''_j). \tag{4, 50}$$

На основании (4, 42) и (4, 49) получаем:

$$(E, G) \subset (a, b),\ \operatorname{mes}(E, G) = b - a, \tag{4, 51}$$

где E есть множество точек на (a, b), в которых выполняется равенство (4, 41). Докажем, что ряд (4, 27) суммируется методом T'_0 во всех точках множества (E, G) и имеет сумму, равную $\psi(x)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} S_k(x), \tag{4, 52}$$

где $S_k(x)$ определяются из равенства (4, 31) и a_{ik} являются элементами матрицы (1, 2), которая соответствует данному методу T'_0.

Утверждение, которое нам нужно доказать, можно формулировать следующим образом:

Для любого $x \subset (E, G)$ ряд (4, 52) сходится при всех достаточно больших значениях i и имеет сумму, которая стремится к пределу $\psi(x)$, когда $i \to \infty$.

Предположим, что $x \subset (E, G)$. В силу условия 1° (§ 1, определение методов T') предыдущее утверждение будет доказано, если мы докажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \cdot |S_k(x) - \psi(x)| \tag{4, 53}$$

сходится для всех достаточно больших значений i и имеет сумму которая стремится к нулю, когда $i \to \infty$. Положим

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} |a_{ik}| \cdot |S_k(x) - \psi(x)|, \tag{4, 54}$$

$$\varepsilon_j(x) = \max_{l_j \leqslant s < +\infty} |Z_{l_s}(x) - \psi(x)|. \tag{4, 55}$$

По предположению, точка x принадлежит множеству (E, G) и, следовательно, множеству E. В таком случае, из равенства (4, 41) следует, что

$$\lim_{j \to \infty} \varepsilon_j(x) = 0. \tag{4, 56}$$

Кроме того, так как $x \subset G$, то на основании (4, 48) существует натуральное число j_x, зависящее вообще от x, такое, что

$$x \subset G_j'' \quad (j > j_x). \tag{4, 57}$$

Рассмотрим свойства функции $\sigma_{ij}(x)$. Мы будем иметь на основании (4, 54), (4, 38) и (4, 39):

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j'} |\alpha_{ik}| \cdot |Z_l(x) - \psi(x)| +$$

$$+ |Z_{l_j}(x) - \psi(x)| \cdot \sum_{k=\mu_j'+1}^{\mu_{j+1}} |\alpha_{ik}|, \tag{4, 58}$$

где индекс l зависит от k и определяется из равенства $l = l_{j-1} + k - \mu_j$. При этом из (4, 34) следует, что для рассматриваемых значений l выполняется неравенство

$$l_{j-1} < l \leqslant l_j'. \tag{4, 59}$$

На основании первого неравенства (4, 8) натуральные числа λ_r возрастают вместе с r. Так как $\lambda_1 = 0$, то каждому значению $i = 1, 2, 3, \ldots$ сооответствует определенное значение r, для которого выполняется неравенство

$$\lambda_r < i \leqslant \lambda_{r+1}. \tag{4, 60}$$

В дальнейшем мы будем считать число i настолько большим, чтобы для соответствующего значения r выполнялось неравенство

$$r-1>j_x. \tag{4, 61}$$

Если r удовлетворяет неравенству (4, 60) и если $j=r$ или $j=r-1$, то на основании (4, 61) и (4, 57) $x \subset G_j''$, а в таком случае, сопоставляя (4, 58), (4, 50), (4, 59) и (4, 55), будем иметь:

$$\sigma_{ij} \leqslant L_j \cdot \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j'} |\alpha_{ik}| + \varepsilon_j(x) \cdot \sum_{k=\mu_j'+1}^{\mu_{j+1}} |\alpha_{ik}|. \tag{4, 62}$$

Принимая во внимание определение чисел γ_i [равенство (1, 4)], условие 2° (определение методов T') и первое неравенство (4, 4), мы можем написать:

$$\sigma_{ij}(x) \leqslant L_j\gamma_i(\mu_j' - \mu_j) + M \cdot \varepsilon_j(x) \leqslant$$
$$\leqslant L_r\gamma_i(\mu_j' - \mu_j) + M \cdot \varepsilon_j(x), \tag{4, 63}$$

где M есть постоянное положительное число, которое входит в условие 2°. Далее, из равенств (4, 6), (4, 11), из неравенства (4, 60) и из первого неравенства (4, 9) мы получим:

$$\gamma_i \leqslant \gamma_{\lambda_r}', \quad \mu_j' - \mu_j < l_j \leqslant l_r < \mu_{r-1}, \tag{4, 64}$$

откуда на основании (4, 63) и второго неравенства (4, 8):

$$\sigma_{ij}(x) < \frac{1}{r} + M\varepsilon_j(x) \quad (j=r-1 \text{ или } j=r). \tag{4, 65}$$

Предположим теперь, что $j>r$. Принимая во внимание (4, 61) и (4, 57), будем иметь: $x \subset G_j''$, откуда на основании (4, 58), (4, 59) и (4, 50):

$$\sigma_{ij}(x) \leqslant L_j \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} |a_{ik}|. \tag{4, 66}$$

Из неравенства (4, 60) получаем:

$$i \leqslant \lambda_j \quad (j>r) \tag{4, 67}$$

и, следовательно, на основании (4, 66), (4, 9) и (4, 10):

$$\sigma_{ij}(x) \leqslant L_j\delta_j < \frac{1}{2^j} \quad (j>r). \tag{4, 68}$$

Рассмотрим еще случай, когда $j<r-1$. Принимая во внимание (1, 4), (4, 6) и (4, 60), будем иметь:

$$|a_{ik}| \leqslant \gamma_i \leqslant \gamma_{\lambda_r}' \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

а в таком случае из неравенства (4, 58) получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{ij}(x) \leqslant \gamma_{\lambda_r}' \left[\sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j} |Z_l(x) - \psi(x)| + |Z_{l_j}(x) - \psi(x)| (\mu_{j+1} - \mu_j') \right] \\ &\qquad\qquad (l = l_{j-1} + k - \mu_j). \end{aligned}\right\} \tag{4, 69}$$

На основании (4, 57) из равенства (4, 61) следует, что $x \subset G_r$. Так как все значения l, входящие в правую часть неравенства

(4, 69), удовлетворяют неравенству (4, 59), то, сопоставляя (4, 69) и (4, 50), будем иметь:

$$\sigma_{ij}(x) \leqslant \gamma'_{\lambda_r} L_r (\mu_{j+1} - \mu_j) \quad (j < r - 1). \tag{4, 70}$$

Во всех наших рассуждениях мы предполагаем, что x есть любая точка множества (E, G). Из равенства (4, 54) и неравенства (4, 68) следует, что ряд (4, 53) сходится в рассматриваемой точке x для всех значений i, для которых соответствующее значение r удовлетворяет неравенству (4, 61). Иначе говоря, ряд (4, 53) сходится в рассматриваемой точке x для всех достаточно больших значений i. Обозначая через $T_i(x)$ сумму этого ряда, мы будем иметь:

$$T_i(x) = \sum_{j=1}^{r-2} \sigma_{ij}(x) + \sigma_{i,r-1}(x) + \sigma_{ir}(x) + \sum_{j=r+1}^{\infty} \sigma_{ij}(x). \tag{4, 71}$$

Докажем, что

$$\lim_{i\to\infty} T_i(x) = 0. \tag{4, 72}$$

Принимая во внимание неравенство (4, 70) и равенство $\mu_1 = 0$, будем иметь:

$$\sum_{j=1}^{r-2} \sigma_{ij}(x) < \gamma'_{\lambda_r} \cdot L_r \sum_{j=1}^{r-2} (\mu_{j+1} - \mu_j) = \gamma'_{\lambda_r} L_r \mu_{r-1}. \tag{4, 73}$$

Из определения числа r следует, что

$$\lim_{i\to\infty} r = \infty; \tag{4, 74}$$

а в таком случае из неравенства $\sigma_{ij}(x) \geqslant 0$ и второго неравенства (4, 8) следует, что

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{r-2} \sigma_{ij}(x) = 0. \tag{4, 75}$$

Из неравенства (4, 65) получаем:

$$\sigma_{i,r-1}(x) < \frac{1}{r} + M \cdot \varepsilon_{r-1}(x),$$

$$\sigma_{ir}(x) < \frac{1}{r} + M \cdot \varepsilon_r(x),$$

откуда на основании (4, 56) и (4, 74):

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_{i,r-1}(x) = 0, \quad \lim_{i\to\infty} \sigma_{ir}(x) = 0. \tag{4, 76}$$

Кроме того, из неравенства (4, 68) будем иметь:

$$\sum_{=r+1}^{\infty} \sigma_{ij}(x) < \frac{1}{2^r}$$

и, следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=r+1}^{\infty} \sigma_{ij}(x) = 0. \tag{4, 77}$$

Сопоставляя (4, 71), (4, 75), (4, 76) и (4, 77), получаем равенство (4, 72).

Таким образом мы доказали, что в любой точке x, принадлежащей множеству (E, G), ряд (4, 53) сходится для всех достаточно больших значений i и имеет сумму, которая стремится к нулю, когда $i \to \infty$. Как мы уже видели, отсюда следует, что ряд (4, 27) суммируется методом T_0' в рассматриваемых точках x и имеет сумму, равную $\psi(x)$. Принимая во внимание (4, 51), мы отсюда заключаем, что ряд (4, 27) суммируется данным методом T_0' почти всюду на интервале (a, b). Мы уже видели, что ряд (4, 28) обладает тем же свойством. Следовательно, на основании (4, 26) ряд (1, 10) суммируется данным методом T_0' почти всюду на (a, b). Теорема I доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
20. I. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Toeplitz, Über lineare Mittelbildungen, Prace mat. fiz., **22**, 113—119, 1911.

[2] Menchoff D., Sur la convergence et la sommation des séries de fonctions orthogonales, Bulletin de la Société Math. de France, **64**, 147, 1936.

[3] Kaczmarz u. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa, 1935.

[4] Egoroff D., Sur les suites des fonctions mesurables, C. R. Acad. Sc., **152**, 244, 1911.

[5] Fischer E., Sur la convergence en moyenne, C. R. Acad. Sc., **144**, 1022—1024, 1148—1150, 1907.

[6] Riesz F., Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, C. R. Acad. Sc. **144**, 615—619, 734—736, 1907.

[7] J. Marcinkiewicz, Sur la convergence des séries orthogonales, Studia Math., **6**, 39, 1936.

D. MENCHOFF. SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DE FONCTIONS ORTHOGONALES PAR DES MÉTHODES LINÉAIRES

RÉSUMÉ

Le but de cet ouvrage est de démontrer un théorème sur la sommation des séries de fonctions orthogonales par des méthodes linéaires. Rappelons tout d'abord la définition de ces méthodes. Étant données une série infinie quelconque

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

et une matrice infinie

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{13}, \ \cdots \ , \ a_{1k}, \ \cdots \\ a_{21}, \quad a_{22}, \quad a_{23}, \ \cdots \ , \ a_{2k}, \ \cdots \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_{i1}, \quad a_{i2}, \quad a_{i3}, \ \cdots \ , \ a_{ik}, \ \cdots \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \end{array} \right. \tag{2}$$

considérons la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} s_k \tag{3}$$

où $s_k = \sum_{n=1}^{k} u_n$ .On dit que la série (1) est sommable par la méthode linéaire définie à l'aide de la matrice (2), si la série (3) converge pour toutes les valeurs de i suffisamment grandes et possède une somme qui tend vers une limite finie, bien déterminée lorsque $i \to \infty$. La valeur de cette limite est, par définition, la somme généralisée de la série (1).

On dit qu'une méthode linéaire est **régulière**, si les éléments de la matrice (2) vérifient les conditions suivantes:

1°. La série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ converge absolument pour toutes les valeurs de i et

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1.$$

2°.
$$\sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} | < M$$

où M ne dépend pas de i.

3°.
$$\lim_{i \to \infty} a_{ik} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)^*.$$

Soit γ_i le maximum de tous les nombres $|a_{ik}|$ pour une valeur fixe de i,

$$\gamma_i = \max_{1 \leqslant k < +\infty} |a_{ik}|. \tag{4}$$

Nous désignerons par T' toute méthode linéaire pour laquelle les éléments a_{ik} de la matrice (2) vérifient les conditions 1°, 2° et aussi la condition

4°.
$$\lim_{i \to \infty} \gamma_i = 0.$$

Il est clair que toute méthode T' est une méthode régulière, mais la proposition réciproque n'est pas vraie. D'ailleurs il est

* La définition dés méthodes régulières est due à M. Toeplitz [1].

facile de voir que les méthodes de Cesàro de tout ordre positif sont des méthodes T' [2].

Soit

$$\{\varphi_n(x)\} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\} \tag{5}$$

un système normé de fonctions orthogonales sur un intervalle (a, b), c'est-à-dire

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Suivant M. M. S. Kaczmarz et H. Steinhaus, nous désignerons un tel système par *ON*. On peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME I. *Étant donnés un système ON arbitraire* (5) *et une méthode quelconque T', on peut toujours effectuer dans ce système un changement de l'ordre des fonctions de tel façon que pour le nouveau système $\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$ ainsi obtenu, la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\nu_n}(x)$$

soit sommable par la méthode T' considérée presque partout dans (a,b), où c_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ sont des constantes assujetties à une seule condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty. \tag{6}$$

Dans la démonstration de ce théorème il faut se servir d'un lemme et d'un théorème dont les énoncés sont les suivants.

LEMME *. *Étant donné un système ON arbitraire* (5), *on peut déterminer une suite croissante de nombres entiers et positifs m_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, tels que*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{m_k} c_n \varphi_n(x)$$

existe et possède une valeur finie presque partout dans (a, b), où c_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des constantes assujetties à une seule condition (6) **.

THÉORÈME II. *Chaque système ON infini contient une partie infinie qui est un système de convergence.*

---

* Pendant que cet ouvrage se trouvait sous presse, j'ai appris que ce lemme avait été déjà démontré par M. Marcinkiewicz [7]. Le théorème II est une conséquence immédiate de ce lemme.

** Nous dirons qu'un système *ON* quelconque $\{\psi_n(x)\}$ est un s y s t è m e d e c o n v e r g e n c e, lorsque la condition (6) entraine toujours la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

presque partout dans (a, b).

La définition du système de convergence, ainsi que la démonstration du théorème II se trouvent aussi dans l'ouvrage cité plus haut [2].

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

П. С. НОВИКОВ

О ВЗАИМООТНОШЕНИИ ВТОРОГО КЛАССА ПРОЕКТИВНЫХ МНОЖЕСТВ И ПРОЕКЦИЙ УНИФОРМНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ДОПОЛНЕНИЙ *

Работа посвящена выяснению условий, при которых A_2-множество является A_2'-множеством.

Установлено, что проекция на ось OX всякого CA-множества, не имеющего совершенного ядра ни на одной прямой x=const, есть всегда A_2'-множество. Кроме того, установлено, что всякое A_2-множество есть проекция CA-множества, пересекающегося прямыми x=const по B-множествам.

Установлена связь рассматриваемой проблемы с проблемой мощности CA-множеств, а именно: если существует A_2-множество, не являющееся A_2'-множеством, то всякое несчетное CA-множество имеет совершенное ядро.

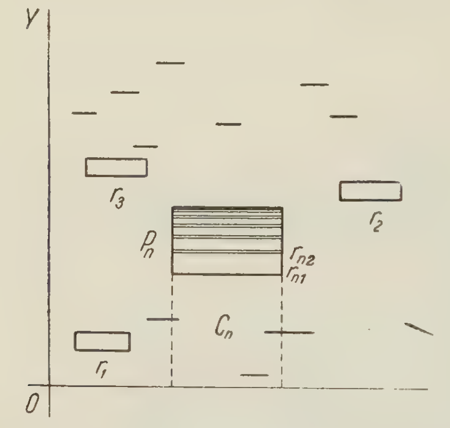
Для проблемы мощности CA-множеств получена следующая редукция: Если у всякого несчетного CA-множества всегда существует конституанта, имеющая не менее двух точек, то существует и совершенное ядро.

В моей предыдущей работе [1] я рассмотрел класс множеств, являющихся проекциями униформных аналитических дополнений. В частности, мною было установлено, что этот класс совпадает с классом проекций конечноформных аналитических дополнений. После этого естественно возникает вопрос о том, что представляет собою класс проекций счетноформных аналитических дополнений? Методы предыдущей работы не позволяют выяснить, совпадает ли этот класс множеств с классом проекций униформных аналитических дополнений. В настоящей работе я доказываю это, причем применяемый здесь метод дает возможность доказать следующее: проекция на ось OX любого плоского аналитического дополнения, пересекающегося с каждой прямой, параллельной оси OY, по множеству, не содержащему совершенного ядра, является в то же время проекцией однозначного аналитического дополнения.

Далее установлено, что вопрос о соотношении класса проекций униформных аналитических дополнений и второго класса проек-

* Доложено на заседании Группы математики Академии Наук СССР 22 декабря 1936 г.

тивных множеств связан с проблемой мощности аналитических дополнений, именно: из гипотезы, что существует проективное множество второго класса, не являющееся проекцией никакого униформного аналитического дополнения, вытекает, что каждое несчетное аналитическое дополнение имеет мощность континуума. Множества, являющиеся проекциями униформных аналитических дополнений, мы будем называть ради краткости A_2'-множествами.



В дальнейшем мы неоднократно будем опираться на следующую лемму:

ЛЕММА I. *Пусть C есть элементарное решето, $\alpha(x)$— индекс* этого решета в точке x. Всегда существует решето $\overline{C}$, индекс которого равен $\omega^{\alpha(x)}$.*

Доказательство. Рассмотрим решето C. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ будут интервалы этого решета. Мы можем предположить, что к каждому из этих интервалов примыкает сверху прямоугольник, не содержащий никаких других интервалов этого решета. Подобное решето мы будем называть изолированным. Прямоугольник, примыкающий к интервалу r_n, обозначим через P_n. Обозначим через C_n часть решета C, находящуюся под интервалом r_n. Проведем внутри каждого прямоугольника P_n счетное число отрезков прямых, параллельных и равных r_n, стремящихся к верхней стороне этого прямоугольника. Пусть это будет последовательность $r_{n1}, r_{n2}, \ldots, r_{nk}, \ldots$ (причем r_{n1} есть r_n).

Совокупность всех интервалов r_{nk} есть изолированное решето; обозначим его C^1.

Обозначим через P_{nk} прямоугольник, примыкающий сверху к интервалу r_{nk} и не содержащий других интервалов решета C^1. Преобразуем часть плоскости, лежащую под элементом r_n, в прямоугольник P_{nk} таким образом, чтобы абсциссы точек при этом не менялись, а ординаты изменились с сохранением взаимного порядка. Обозначим это преобразование** U_{nk}. Совокупность всех образов интервалов r_{ij}, которые получатся от всевозможных преобразований U_{nk}, присоединим к решету C^1; мы получим новое изолированное решето C^2. Применяя описанный процесс к ре-

* Индекс решета в точках A-множества мы считаем равным Ω.

** Преобразование U_{nk} имеет вид: $x_1 = x$, $y_1 = \varphi(y)$.

шету C^2, мы получим решето C^3. Вообще, применяя этот процесс к решету C^n, получим решето C^{n+1}.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{C} = C^1 + C^2 + \ldots + C^n + \ldots$$

Пусть R_a, R_a^j, $\overline{R}_a$ суть части решет C, C^j, $\overline{C}$, расположенные на прямой $x = a$.

Обозначим через S_{ab}, S_{ab}^j, $\overline{S}_{ab}$ части множеств R_a, R_a^j и $\overline{R}_a$, для которых $y < b$.

Мы покажем, что решето $\overline{C}$ удовлетворяет требованию леммы. Итак, нам надо показать, что индекс решета $\overline{C}$ в точке x есть ω^α, если индекс решета C в той же точке есть α. Доказательство будем вести методом трансфинитной индукции.

Рассмотрим точки оси OX, для которых индекс решета C есть 1. Пусть a есть такая точка. Тогда множество R_a^1, очевидно, имеет тип ω. Множества R_a^2, R_a^3, ... будут совпадать с R_a^1, так как под единственной точкой множества R_a никаких прямоугольников P_{nk} нет, и, следовательно, новые интервалы, которые получаются в решетах C^2, C^3, ... только посредством преобразований U_{nk}, не будут пересекать прямую $x = a$.

Итак, для $\alpha = 1$ высказываемое утверждение верно, каково бы ни было изолированное решето C.

Допустим, что α есть любое число первого или второго класса и что для всех меньших чисел и любого решета C высказываемое утверждение верно. Рассмотрим точку a, для которой R_a имеет тип α.

I случай: α есть число второго рода. Тогда R_a не содержит своей верхней грани, но содержит последовательность точек (a, b_1), $(a, b_2), \ldots, (a, b_n), \ldots$, где $b_i < b_{i+1}$, стремящихся к его верхней грани. Пусть $r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_i}, \ldots$ — интервалы решета C, проходящие соответственно через точки $(a, b_1), (a, b_2), \ldots, (a, b_i), \ldots$

Рассмотрим решета $C_{n_i}, C_{n_i}^1, \ldots, C_{n_i}^j, \ldots$, и $\overline{C}_{n_i}$, где $\overline{C}_{n_i}$ есть часть решета $\overline{C}$, расположенная под интервалом r_{n_i}, а $C_{n_i}^j$ — часть решета C, расположенная под интервалом r_{n_i}.

Нетрудно видеть, что $\overline{C}_{n_i}$ получается из C_{n_i} точно таким же процессом, как решето $\overline{C}$ из решета C. С другой стороны, множество S_{ab_i} имеет тип β_i, меньший α; тогда, согласно сделанному предположению, $\overline{S}_{ab_i}$ имеет тип ω^{β_i}. Но $\lim \beta_i = \alpha$ и, следовательно, $\lim \omega^{\beta_i} = \omega^\alpha$, т. е. тип $\overline{R}_a$ есть ω^α.

II случай: α есть число первого рода. Тогда R_a имеет самую верхнюю точку, пусть это будет $v(a, b)$. Пусть интервал решета C, проходящий через точку v, будет r_q. Тогда, как

и в предыдущем случае, тип множества $\bar{S}_{ab}$, согласно предположению, будет равен $\omega^{\alpha-1}$, так как тип S_{ab} есть $\alpha - 1$. Рассмотрим прямоугольники $P_{q1}, P_{q2}, \ldots, P_{qi}, \ldots$ Обозначим через p_{qi} интервал, являющийся пересечением прямоугольника P_{qi} и прямой $x=a$. Часть множества $\bar{R}_a$, расположенная в интервале p_{qi}, есть отображение $\bar{S}_{ab}$ посредством преобразования U_{qi}, так как, во-первых, каждая точка множества $\bar{S}_{ab}$ принадлежит некоторому R_a^n и, следовательно, R_a^{n+1} будет содержать ее отображение в p_{qi}; во-вторых, интервал p_{qi} содержит только точки множества $\bar{R}_a$, которые являются отображениями точек $\bar{S}_{ab}$ при преобразовании U_{qi}. Кроме точек, являющихся отображениями точек множества $\bar{S}_{ab}$ на интервалах p_{qi}, нижних концов интервалов p_{qi} и самого множества $\bar{S}_{ab}$, на прямой $x=a$ больше точек решета $\bar{C}$ не имеется, так как v есть самая верхняя точка решета C на этой прямой, и над ней никаких других прямоугольников вида P_{nk}, кроме указанных выше P_{qi}, нет.

Но тогда множество $\bar{R}_a$ состоит из множества $\bar{S}_{ab}$ и из счетного числа ему подобных, расположенных в интервалах p_{qi}, иначе говоря, тип $\bar{R}_a$ есть $\omega^{\alpha-1} \cdot \omega = \omega^{\alpha}$.

Ч. Т. Д.

Для дальнейшего нам необходимо сделать два замечания относительно некоторых свойств трансфинитных чисел и решет.

1. Легко видеть, что трансфинитные числа типа ω^{α} обладают тем свойством, что если

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2,$$

то

$$\beta_1 = \beta_2.$$

Нетрудно также видеть, что трансфиниты рассматриваемого вида обладают еще таким свойством: если $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$ и, кроме того, $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$, то $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

Отсюда вытекает, что для любых трансфинитов ω^{α} мы будем иметь: если

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_1 = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_n + \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1} + \ldots + \beta_1,$$

то $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_i = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_i$ для всякого числа i от 1 до n. Отсюда вытекает, что $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

Говоря иначе, выражение

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_1,$$

где все α_n суть числа типа ω^{α}, вполне определяет числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

2. Пусть мы имеем n аналитических дополнений $E_1, E_2, \ldots, E_n$, причем E_i определяется решетом C_i. Индексы этих решет мы будем предполагать в дальнейшем числами вида ω^{α}, что возможно на

основании леммы I. Ясно, что пересечение $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ аналитических дополнений, заданных решетами $C_1, C_2, \ldots, C_n$, может быть определено решетом, состоящим из суммы решет $C_1', C_2', \ldots, C_n'$, расположенных одно над другим, и таких, что C_i' подобно C_i. Обозначим эту сумму решет C_n^*. Трансфинитный индекс решета C_n^* в каждой точке аналитического дополнения $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ будет равен сумме индексов решет $C_1', C_2', \ldots, C_n'$, или, что то же, решет $C_1, C_2, \ldots, C_n$, причем суммирование ведется в том порядке, в каком решета C_k' расположены одно над другим. Покажем теперь, что множество $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ можно определить решетом C_n^{**} таким, что индекс решета C_n^{**}, в каждой точке множества $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$, равен произведению индексов решет $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Рассмотрим счетную совокупность прямоугольников $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ со сторонами, параллельными осям координат, не имеющих попарно общих точек и таких, что верхние стороны этих прямоугольников (так же, как нижние) образуют решето, подобное C_n. Такое множество прямоугольников, очевидно, существует. В каждом из прямоугольников l_i расположим совокупность прямоугольников $l_{i1}, l_{i2}, \ldots, l_{in}, \ldots$, подобную части решета C_{n-1}, расположенной в полосе, ограниченной прямыми, составляющими продолжения сторон прямоугольника l_i, параллельных оси OY. Таким же образом мы определим совокупности прямоугольников

$$\{l_{i_1 i_2 i_3}\}, \ldots, \{l_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}\}.$$

В каждый прямоугольник $l_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ мы впишем решето, подобное части решета C_1, расположенной в полосе, ограниченной продолжениями сторон прямоугольника $l_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$, параллельных оси OY. Это решето состоит из счетного числа отрезков, которые мы будем обозначать:

$$g_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} 1}, \ g_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} 2}, \ldots, g_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}, \ldots$$

Совокупность отрезков $g_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ образует решето. Очевидно, что, во-первых, это решето определяет $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ и, во-вторых, индекс этого решета в точке x_0 равен произведению индексов решет $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Сопоставляя это с тем, что сказано раньше относительно суммирования решет, мы можем утверждать, что *для решет $C_1, C_2, \ldots, C_n$ существует решето $\overline{C}_n$, определяющее $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ и такое, что индекс решета $\overline{C}_n$ в точке x_0 есть*

$$\alpha_1(x_0) \cdot \alpha_2(x_0) \cdot \ldots \cdot \alpha_n(x_0) + \alpha_1(x_0) \cdot \alpha_2(x_0) \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1}(x_0) + \ldots + \alpha_1(x_0),$$

где $\alpha_i(x_0)$—индекс решета C_i в точке x_0.

Пусть E_1 разбивается при помощи решета C_1 на конституанты $\{E_{1\beta}\}$, E_2—на конституанты $\{E_{2\beta}\}$ и т. д., E_n разбивается решетом C_n на конституанты $\{E_{n\beta}\}$.

Покажем, что *множество* $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ *разбивается решетом* C_n *на конституанты, совокупность которых представляет собою совокупность всех множеств вида*

$$\left\{E_{1\beta_1} \cdot E_{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E_{n\beta_n}\right\}.$$

Решета $C_1, C_2, \ldots, C_n$ мы можем считать попарно без равных индексов.

Рассмотрим какую-нибудь конституанту множества $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$. Ее индекс есть число вида

$$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_n + \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1} + \ldots + \beta_1. \qquad (*)$$

Выражение $(*)$ вполне определяет числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Отсюда следует, что каждая точка рассматриваемой конституанты входит в

$$E_{1\beta_1} \cdot E_{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E_{n\beta_n}.$$

Обратное положение очевидно. Итак, каждая конституанта множества $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ есть пересечение конституант множеств E_1, $E_2, \ldots, E_n$.

Рассмотрим теперь любое пересечение конституант

$$E_{1\beta_1} \cdot E_{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E_{n\beta_n}.$$

Каждой точке этого пересечения отвечает индекс решета $\bar{C}_n$:

$$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_n + \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1} + \ldots + \beta_1.$$

Следовательно, каждая точка множества

$$E_{1\beta_1} \cdot E_{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E_{n\beta_n}$$

принадлежит конституанте множества $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ с индексом

$$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_n + \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1} + \ldots + \beta_1.$$

Ч. Т. Д.

ЛЕММА II. *Пусть дано некоторое аналитическое дополнение* E, *разбитое на конституанты* E_β, *и некоторое совершенное множество* P, *пересекающееся с каждой конституантой индекса, не превышающего* α, *не более как по счетному множеству и имеющее точки на* E_α. *Тогда существует счетное число аналитических дополнений* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$, *принадлежащих множеству* E, *разбитых определенным образом на конституанты* $\mathcal{E}_{i\beta}$ *и таких, что по крайней мере одна из конституант* $\mathcal{E}_{i\beta}$ *пересекается с* P *по одной и только одной точке, которая в то же время принадлежит* E_α.

Ни множества $\mathcal{E}_i$, *ни их конституанты* $\mathcal{E}_{i\beta}$ *не зависят ни от выбора совершенного множества* P, *ни от числа* α.

Доказательство. Пусть E—некоторое аналитическое дополнение, C—решето, его определяющее, и P—совершенное множество, содержащее точки некоторой конституанты E_α и пересекающееся с множеством $E_0 + E_1 + \ldots + E_\alpha$ не более, как по счетному множеству точек. Мы можем предположить, что индексы решета C имеют вид ω^α. Пусть

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \tag{1}$$

совокупность интервалов решета C;

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots \tag{2}$$

совокупность интервалов с рациональными концами, содержащихся в интервалах решета C. Обозначим через C_n часть решета C, расположенную под ρ_n, а через C_n^+ решето, определяющее то же CA-множество, что и C_n, и имеющее в точке x трансфинитный индекс ω^γ, если C_n в этой точке имеет индекс γ.

E_n есть аналитическое дополнение, определяемое решетом C_n на интервале $\Pi_x(\rho_n)$*; $E_{n\gamma}$ и $E_{n\gamma}^+$ суть конституанты E_n, определяемые решетами C_n и C_n^+.

Мы имеем:

$$E_{n\gamma} = E^+_{n\omega^\gamma}.$$

Рассмотрим всевозможные множества вида:

$$P \cdot E_\alpha \text{ и } P \cdot E_\alpha \cdot E_{n_1\beta_1} \cdot E_{n_2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E_{n_k\beta_k},$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k$—произвольные целые числа, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$—числа первого и второго классов. Покажем, что по крайней мере одно из этих множеств clairsemé. Предположим противное. Тогда $P \cdot E_\alpha$ не есть clairsemé, и мы можем найти два интервала l_1 и l_2 без общих точек, содержащих точки $P \cdot E_\alpha$. Пусть r_{n_1} и r_{n_2}—интервалы последовательности (1) с наименьшими индексами, проекции которых на ось OX содержат соответственно точки множеств $l_1 \cdot P \cdot E_\alpha$ и $l_2 \cdot P \cdot E_\alpha$. Тогда мы можем найти два интервала ρ_{m_1} и ρ_{m_2}, содержащиеся соответственно в r_{n_1} и r_{n_2} и такие, что $\Pi_x(\rho_{m_1}) \subset l_1$, $\Pi_x(\rho_{m_2}) \subset l_2$, $\Pi_x(\rho_{m_1})$ содержит точки множества $l_1 \cdot P \cdot E_\alpha$, а $\Pi_x(\rho_{m_2})$ содержит точки множества $l_2 \cdot P \cdot E_\alpha$ и $\Pi_x(\rho_{m_1}) \cdot \Pi_x(\rho_{m_2}) = 0$.

Среди множеств $l_1 \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1}$ и $l_2 \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_2\beta_2}$ найдутся, очевидно, не пустые. Пусть $l_1 \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1}$ не пустое множество с наименьшим индексом β_1 и $l_2 \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_2\beta_2}$ не пустое множество с наименьшим индексом β_2. Оба эти множества будут в силу гипотезы не clairsemé. Тогда мы можем выбрать четыре интервала попарно без общих точек:

$$l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22}$$

XO* $\Pi_x(A)$ есть проекция A на ось OX.

так, что

$$l_{11} \text{ и } l_{12} \subset \Pi_x(\rho_{m_1}), \text{ а } l_{21} \text{ и } l_{22} \subset \Pi_x(\rho_{m_2})$$

и, кроме того, l_{11} и l_{12} содержат точки множества $P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1}$, а l_{21} и l_{22} содержат точки множества $P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_2\beta_2}$.

Далее мы возьмем четыре интервала $r_{n_3}, r_{n_4}, r_{n_5}, r_{n_6}$ последовательности (1), отличные от r_{n_1} и r_{n_2}, с наименьшими индексами из тех, проекции которых содержат соответственно точки множеств:

$$l_{11} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1}, \ldots, l_{22} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_2\beta_2}.$$

Из этих интервалов выделим интервалы $\rho_{m_3}, \rho_{m_4}, \rho_{m_5}, \rho_{m_6}$ такие, что

$$l_{11} \supset \Pi_x(\rho_{m_3}), \; l_{12} \supset \Pi_x(\rho_{m_4}), \; l_{21} \supset \Pi_x(\rho_{m_5}), \; l_{22} \supset \Pi_x(\rho_{m_6})$$

и, кроме того, $\Pi_x(\rho_{m_3})$ содержит точки множества $l_{11} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1}$ и т. д.

Далее очевидно, что среди множеств

$$l_{11} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1} \cdot E_{m_3\beta_3}$$

найдутся не пустые. Возьмем из них то, у которого индекс β_3 наименьший. Таким же образом определяем множества:

$$l_{12} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1} \cdot E_{m_4\beta_4}, \ldots, l_{22} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1} \cdot E_{m_6\beta_6}.$$

Подобным же образом мы можем определить интервалы

$$l_{111}, l_{112}, \ldots, l_{222}$$

и соответствующие множества:

$$l_{111} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1} \cdot E_{m_3\beta_3} \cdot E_{m_7\beta_7}, \ldots, l_{222} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_2\beta_2} \cdot E_{m_6\beta_6} \cdot E_{m_{15}\beta_{15}}.$$

Рассмотрим множество

$$H = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n \ldots} \prod_{k=1}^{\infty} l_{i_1} \cdot l_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot l_{i_1 i_2 \ldots i_k} \cdot \ldots$$

Ясно по построению, что H содержится в P, кроме того, H есть совершенное множество. Покажем*, что H содержится в

$$E_0 + E_1 + \ldots + E_\alpha.$$

Рассмотрим любую точку множества H, например

$$h = l_{j_1} \cdot l_{j_1 j_2} \cdot \ldots \cdot l_{j_1 j_2 \ldots j_k} \cdot \ldots$$

Пусть R^h есть прямая, перпендикулярная оси OX и проходящая через точку h; интервалам $l_{j_1}, l_{j_1 j_2}, \ldots$ согласно построению

* См. лит. (2).

соответствуют интервалы решета $r_{p_1}, r_{p_2}, \ldots, r_{p_k}, \ldots$, причем $p_1 < < p_2 < \ldots < p_k < \ldots$

Покажем, что прямая R^h пересекает решето C только по этим интервалам.

В самом деле, пусть R^h пересекается еще с некоторым интервалом r_q, не принадлежащим системе интервалов r_{p_k}; тогда существует такое целое число t, что $p_t < q < p_{t+1}$. Но $r_{p_{t+1}}$ есть интервал с наименьшим индексом, отличный от интервалов $r_{p_1}, r_{p_2}, \ldots, r_{p_t}$ и такой, что его проекция покрывает точки множества

$$l_{j_1 j_2 \ldots j_k} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{g_1\gamma_1} \cdot E_{g_2\gamma_2} \cdot \ldots \cdot E_{g_k\gamma_k}.$$

Точка h является, очевидно, предельной к этому множеству, так как оно имеет точки во всех последующих интервалах $l_{j_1 j_2 \ldots j_{k+1}}, \ldots$ Следовательно, проекция интервала p_q тоже покрывает точки данного множества. Отсюда $q = p_{t+1}$.

Покажем теперь, что $R^h \cdot C$ есть множество вполне упорядоченное, имеющее тип, не превышающий α. Пусть $a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots, a_{p_k}, \ldots$ ординаты точек $R^h \cdot C$, причем a_{p_k} есть ордината точки $R^h \cdot r_{p_k}$. Точке a_{p_k} поставим в соответствие порядковый тип γ_k. Пусть $a_{p_{k_1}} > a_{p_{k_2}}$. Возьмем некоторую точку с ординатой a_{p_d} так, что $p_d > p_{k_1}, p_{k_2}$. Тогда, если точка x_0 принадлежит множеству

$$l_{j_1 j_2 \ldots j_d} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{g_1\gamma_1} \cdot E_{g_2\gamma_2} \cdot \ldots \cdot E_{g_d\gamma_d},$$

то прямая $x = x_0$ пересекает решета $C_{g_{k_1}}$ и $C_{g_{k_2}}$ по вполне упорядоченным множествам типа γ_{k_1} и γ_{k_2}. Но так как $R^{x_0} \cdot C_{g_{k_2}} \supset \supset R^{x_0} C_{g_{k_1}}$, то $\gamma_{k_1} > \gamma_{k_2}$. Это значит, что последовательность ординат a_{p_k} отражается подобно на совокупность порядковых чисел. Следовательно, $R^h \cdot C$ есть множество вполне упорядоченное; кроме того, все числа γ_k не превышают α и поэтому тип $R^h \cdot C$ тоже не может превышать α. Таким образом, точка h принадлежит одному из множеств $E_0, E_1, \ldots, E_\alpha$ и, следовательно,

$$H \subset E_0 + E_1 + \ldots + E_\alpha.$$

Но это есть противоречие, так как

$$(E_0 + E_1 + \ldots + E_\alpha) \cdot P$$

по предположению—множество счетное.

Итак, мы доказали, что по крайней мере одно из множеств

$$P \cdot E_\alpha, P \cdot E_\alpha \cdot E_{n_1\beta_1} \cdot E_{n_2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E_{n_k\beta_k}$$

есть множество clairsemé. Пусть это будет множество

$$P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\alpha_1} \cdot E_{m_2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot E_{m_k\alpha_k}.$$

Очевидно, мы можем из каждого интервала ρ_{m_i} выбрать интервал ρ_{s_i} так, что проекция его содержит одну и только одну точку x_0 множества

$$P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\alpha_1} \cdot E_{m_2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot E_{m_k\alpha_k}$$

и притом одну и ту же для всякого $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. Но тогда

$$P \cdot E_\alpha \cdot E_{s_1\alpha_1} \cdot E_{s_2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot E_{s_k\alpha_k}$$

будет состоять только из одной точки x_0.

Рассмотрим теперь всевозможные множества вида:

$$E \text{ и } E \cdot E_{g_1} \cdot E_{g_2} \cdot \ldots \cdot E_{g_i},$$

где i—любое целое число.

Множества этого типа мы можем представить следующим образом:

$$(E_0 + E_1 + \ldots + E_\beta + \ldots\ldots) \cdot (E^+_{g_10} + E^+_{g_11} + \ldots + E^+_{g_1\beta} + \ldots\ldots) \cdot$$
$$\cdot (E^+_{g_20} + E^+_{g_21} + \ldots + E^+_{g_2\beta} + \ldots\ldots) \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot (E^+_{g_i0} + E^+_{g_i1} + \ldots + E^+_{g_i\beta} + \ldots\ldots) \cdot \ldots$$

или

$$\sum_{\beta_0\beta_1\beta_2\ldots\beta_i\ldots} E_{\beta_0} \cdot E^+_{g_1\beta_1} \cdot E^+_{g_2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E^+_{g_i\beta_i} \cdot \ldots$$

Но числа β_i, для которых множества $E^+_{g_j\beta_j}$ не пусты, суть числа вида ω^α. Поэтому существует такое разложение множества $E \cdot E_{g_1} \cdot E_{g_2} \cdot \ldots \cdot E_{g_i}$, в котором конституантами являются сами множества

$$E_{\beta_0} \cdot E^+_{g_1\beta_1} \cdot E^+_{g_2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E^+_{g_i\beta_i}.$$

Но множества

$$E_\alpha \cdot E_{m_1\alpha_1} \cdot \ldots \cdot E_{m_k\alpha_k} = E^+_{\omega^\alpha} \cdot E^+_{m_1\omega^{\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot E^+_{m_k\omega^{\alpha_k}}$$

и, следовательно, представляют собой конституанты аналитического дополнения

$$E \cdot E_{m_1} \cdot \ldots \cdot E_{m_k}.$$

Итак, одна из конституант этого множества имеет на P одну и только одну точку и эта точка входит в E_α. Обозначим множества

$$E \cdot E_{m_1} \cdot \ldots \cdot E_{m_k}$$

через $\mathcal{E}_j$, так что последовательность

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_j, \ldots$$

содержит все такие множества. Обозначим множества

$$E^+_{\omega^\beta} \cdot E^+_{m_1\omega^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot E_{m_k\omega^{\beta_k}}$$

через $\mathscr{E}_{j\gamma}$, так что совокупность множеств $\{\mathscr{E}_{j\beta}\}$ состоит из всех конституант множеств $\{\mathscr{E}_j\}$. Эти обозначения совпадают с теми, которые приведены в формулировке леммы.

Ч. Т. Д.

Сделаем одно замечание по поводу проблемы мощности аналитических дополнений. Допустим, что существует некоторое аналитическое дополнение, лишенное совершенного ядра. Пусть E будет подобное линейное аналитическое дополнение, оно разбивается при помощи некоторого решета C на конституанты $E = E_0 + E_1 + \ldots + E_\beta + \ldots\ldots$, где все множества E_β не более как счетные.

Пусть α — номер любой не пустой конституанты; тогда для этого числа α мы можем применить доказанную нами лемму, причем в качестве совершенного множества P возьмем ось OX, где расположено E.

Итак, существует счетное число аналитических дополнений $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots$, заданных решетами $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ так, что по крайней мере одно, например $\mathscr{E}_q$, имеет некоторую конституанту $\mathscr{E}_{q\alpha_1}$, состоящую из одной и только одной точки множества E_α. Но тогда найдется такое множество $\mathscr{E}_p$, которое будет иметь $\aleph_1$ различных конституант, каждая из которых состоит из одной и только одной точки.

Рассмотрим пространство $OXYZ$. Пусть на оси OX расположено множество $\mathscr{E}_p$ и в плоскости OXZ — решето C_p, его определяющее; проведем через каждую точку решета C_p прямую под углом $\frac{\pi}{4}$ к оси OX. Совокупность этих прямых образует некоторое пространственное решето C_p^*. Проведем также через каждую точку решета C_p прямую, параллельную оси OY. Получим некоторое пространственное решето $\overline{C}_p$. Пусть M множество тех точек плоскости OXY с ординатой, не равной нулю, в которых индекс решета $\overline{C}_p$ равен индексу решета C_p^*. M есть аналитическое множество. Обозначим через $\Pi_x(M)$ его проекцию на ось OX. Рассмотрим множество

$$H = C\Pi_x(M) \cdot \mathscr{E}_p.$$

Пусть a есть точка $\mathscr{E}_p$, принадлежащая некоторой конституанте E_β, причем эта конституанта содержит еще другие точки. В таком случае прямая, проходящая через точку a и параллельная оси OY, будет содержать по крайней мере одну точку b, в которой индекс решета C_p^* тот же самый, что и в точке a, т. е. β. Но так как индекс решета $\overline{C}_p$ в точке b тот же, что и в точке a, то b принадлежит множеству M и a принадлежит $\Pi_x(M)$ и не принадлежит H. Наоборот, если конституанта, со-

держащая a, других точек не содержит, то на прямой, параллельной оси OY и проходящей через точку a, кроме ее самой, нет точек, в которых C_p^* имеет тот же индекс, что и в точке a. Но тогда $\Pi_x(M)$ на данной прямой не имеет точек с ординатой, отличной от нуля, и, следовательно, a входит в $C\Pi_x(M)$ и в H.

Итак, множество H представляет собою совокупность всех тех точек, каждая из которых находится в соответствующей конституанте множества $\mathcal{E}_p$ в единственном числе. Мы можем представить множество H следующим образом:

$$H = \mathcal{E}_p \cdot \{ C\Pi_x(M) \cdot \mathcal{E}_p \} = (\mathcal{E}_{p0} + \mathcal{E}_{p1} + \ldots + \mathcal{E}_{p\beta} + \ldots) \cdot \\ \cdot (H_0 + H_1 + \ldots + H_\beta + \ldots),$$

где $\mathcal{E}_{p\beta}$ — конституанта $\mathcal{E}_p$, определяемая решетом C_p, а H_α — конституанта H, определяемая каким угодно решетом. Мы знаем, что тогда множество H можно разложить следующим образом на конституанты:

$$H = \sum_{\gamma,\beta=0}^{\Omega} \mathcal{E}_{p\beta} \cdot H_\gamma,$$

причем конституантами этого разложения будут не пустые множества $\mathcal{E}_{p\beta} \cdot H_\gamma$ и только эти множества. Однако всякое не пустое множество $E_{p\beta} \cdot H_\gamma$ состоит из одной и только одной точки.

Итак, множество H несчетно, лишено совершенного ядра и разбивается на конституанты, состоящие из одной точки каждая.

После этого мы можем сформулировать следующую редукцию: *если для любого несчетного аналитического дополнения и для любого решета, его определяющего, найдется конституанта, содержащая более одной точки, то тогда каждое несчетное аналитическое дополнение содержит совершенное ядро.*

Введем следующее понятие. Пусть C есть пространственное решето, определяющее на плоскости OXY аналитическое дополнение E.

Мы будем называть точку P плоскости OXY точкой единственного индекса решета C, если P принадлежит E и является единственной точкой пересечения прямой, параллельной OY, и некоторой конституанты множества E.

ЛЕММА III. *Множество точек единственного индекса есть аналитическое дополнение и может быть униформизировано аналитическим дополнением.*

Доказательство. Обозначим множество точек единственного индекса решета C через U. Доказательство того, что U есть аналитическое дополнение, может быть сделано аналогично тому,

которое я привел для леммы о точках трансфинитной единственности в моей работе (1) *.

Пусть G есть пространственное решето, определяющее множество U.

На основании предыдущего мы можем определить множество U таким решетом K, конституанты которого состоят из всевозможных не пустых пересечений конституант U и E. Но на каждой прямой, параллельной оси OY, каждая конституанта множества E содержит не более одной точки множества U, следовательно, каждая конституанта, определенная решетом K, на каждой прямой, параллельной оси OY, будет состоять из одной точки. Отсюда вытекает, что на каждой прямой, параллельной оси OY и содержащей точки множества U, найдется одна единственная точка с минимальным индексом. На основании леммы I предыдущей работы (1) совокупность этих точек с минимальным индексом— точек трансфинитной единственности—есть аналитическое дополнение, которое в данном случае униформизирует множество U. Это последнее множество мы будем называть **множеством точек относительной трансфинитной единственности множества** E.

ТЕОРЕМА I. *Всякое плоское CA-множество, для которого на каждой прямой, параллельной оси OY и пересекающей данное множество, конституанта наименьшего индекса не более как счетна,— проектируется на ось OX в множество* A'_2.

Доказательство. Пусть G есть плоское аналитическое дополнение, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть C есть пространственное решето, его определяющее, и пусть G_0, G_1, … …, G_α, … … конституанты множества G. Применим нашу лемму к любому не пустому множеству $P^{x_0} G_\beta$, где P^{x_0} есть прямая, $x = x_0$, а x_0 принадлежит проекции G. Здесь условия леммы выполнены, так как P^{x_0}, играющее роль совершенного множества P в лемме, пересекается с G и, следовательно, по крайней мере одна из конституант G_β имеет на P^{x_0} конечное или счетное множество точек, и все конституанты G_α, если $\alpha < \beta$, имеют на P^{x_0} не более счетного числа точек.

Итак, существует счетное число плоских аналитических дополнений $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, …, $\mathscr{E}_n$, … таких, что для каждого $P^{x_0} \cdot G_\beta$ найдется по крайней мере одно множество $\mathscr{E}_{n_1}$, которое имеет некоторую конституанту $\mathscr{E}_{n_1\alpha_1}$, состоящую из одной точки множества $P^{x_0} \cdot G_\beta$. Рассмотрим множество L_{n_1} точек относительной трансфинитной единственности для $\mathscr{E}_{n_1}$. Очевидно, это множе-

* Вся разница состоит в том, что вместо множества R в предыдущей работе надо рассмотреть другое множество, где трансфинитные индексы α и α' равны между собой. См. (1), лемма I.

ство будет не пусто, так как на прямой P^{x_0} оно имеет точку. Проекция L_{n_1} на ось OX содержит точку x_0.

Подобное рассуждение мы можем провести для каждой точки оси OX, принадлежащей проекции G. Мы получим счетное число униформных CA-кривых $L_{n_1}, L_{n_2}, \ldots, L_{n_k}, \ldots$, сумма проекций которых есть проекция множества G. Но множество

$$L_{n_1} + L_{n_2} + \ldots + L_{n_k} + \ldots,$$

как известно, на основании доказанной нами ранее теоремы может быть униформизировано при помощи CA-кривой. Пусть это будет L. Очевидно, кривая L униформизирует множество G. Отсюда непосредственно следует, что проекция множества G входит в класс A'_2.

Ч. Т. Д.

Следствие. *Каждое плоское CA-множество, пересекающееся прямыми, параллельными оси OY, не более как по счетному множеству точек, проектируется на ось OX в A'_2-множество.*

Каждое A'_2-множество разбивается на $\aleph_1$ B-множеств. Естественно назвать конституантой номера α A'_2-множества проекцию конституанты номера α того униформного CA-множества, которое проектируется в данное A'_2-множество. Относительно плоских A'_2-множеств мы докажем теорему, являющуюся аналогом теоремы I.

ТЕОРЕМА II. *Плоское A'_2-множество проектируется на ось OX в A'_2-множество, если на каждой прямой, параллельной оси OY и пересекающей данное множество, конституанта наименьшего индекса конечна или счетна.*

Доказательство. Пусть H есть плоское A'_2-множество, расположенное в плоскости OXY и удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть G — поверхность в пространстве $OXYZ$, являющаяся CA-множеством, униформная относительно параллелей к оси OZ и проектирующаяся в H.

Пусть C четырехмерное решето, расположенное в пространстве $OXYZT$, определяющее G и разбивающее его на конституанты G_α. Согласно предположению, в каждой плоскости, параллельной плоскости OYZ и содержащей точки множества G, найдется не пустая конституанта номера β, имеющая в данной плоскости не более, чем счетное число точек, так же, как и всякая конституанта G_α, где $\alpha < \beta$.

Мы можем преобразовать посредством B-преобразования пространство $OXYZT$ в пространстве OXY_1Z_1 так, что плоскости, параллельные OYZ, перейдут в прямые, параллельные оси OY_1; прямые, параллельные оси OT, перейдут в прямые, параллельные оси OZ_1, и ось OX перейдет сама в себя тождественно. Тогда

множество H перейдет само в себя, множество G перейдет в плоское CA-множество G_1, проектирующееся в H. Решето C перейдет в пространственное решето C_1, определяющее на плоскости OY_1Z_1 аналитическое дополнение G_1. Конституанта G_α перейдет в конституанту $G_{1\alpha}$, причем, если G_α не более, как счетно, на некоторой плоскости, параллельной плоскости OYZ, то $G_{1\alpha}$ не более, как счетно, на соответствующей прямой, параллельной оси OY_1.

Итак, мы видим, что множество G_1 удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и, следовательно, его проекция, т. е. H, есть A'_2-множество.

Ч. Т. Д.

Следствие. *Каждое плоское A'_2-множество, пересекающееся с прямыми, параллельными оси OY, не более как по счетному множеству точек, проектируется на ось OX в A'_2-множество.*

К этому мы присоединим еще одно замечание, которое нам понадобится дальше.

Пусть мы имеем плоское A'_2-множество, которое на каждой прямой, параллельной оси OY, не имеет совершенного ядра. Тогда вопрос о том, будет ли данное A'_2-множество на этих прямых счетно или несчетно, в настоящее время открыт. Но независимо от этого подобное плоское множество удовлетворяет условиям теоремы II.

Каждое плоское A'_2-множество, не имеющее на прямых, параллельных оси OY, совершенного ядра, проектируется на ось OX в A'_2-множество.

ЛЕММА IV. *Пусть E_1 и E_2 плоские аналитические дополнения, а C_1 и C_2 определяющие их решета. Множество V всех тех точек $(x_0 y_0)$ плоскости, для каждой из которых всюду на прямой $x = x_0$ индекс решета C_2 превосходит индекс решета C_1 в точке $(x_0 y_0)$, есть аналитическое дополнение.*

Доказательство этой леммы содержится в моей статье ([3]).

ТЕОРЕМА III. *Всякое A_2-множество, расположенное на оси OX, может быть получено как проекция плоского аналитического дополнения, пересекающегося с каждой прямой, параллельной оси OY, по B-множеству.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ есть линейное A_2-множество, расположенное на оси OX, а E аналитическое дополнение, расположенное в плоскости OXY и проектирующееся в $\mathcal{E}$. Пусть C пространственное решето, определяющее E. Мы можем предположить, что решето C расположено под некоторой плоскостью P, параллельной плоскости OXY; присоединим плоскость P к решету C, получим новое решето C', которое определяет то же аналитическое дополнение E, но в каждой точке $(x_0 y_0)$ множества E индекс решета C' на 1 больше индекса решета C.

Применим теперь предшествующую лемму следующим образом. За множества E_1 и E_2 леммы примем одно и то же множество E, за решета C_1 и C_2 примем соответственно решета C и C'.

Очевидно, на каждой прямой $x = x_0$ множество V леммы IV состоит из точек конституанты наименьшего индекса множества E, и поэтому пересечение множества V и этой прямой есть B-множество.

С другой стороны, на каждой прямой $x = x_0$, содержащей точки множества E, по крайней мере одна из конституант не пуста. Отсюда следует, что проекция V есть множество E.

Ч. Т. Д.

ТЕОРЕМА IV. *Всякое A_2-множество, содержащееся в некотором A_2'-множестве и обладающее тем свойством, что минимальный индекс в каждой точке данного A_2-множества не превышает индекса в той же точке указанного A_2'-множества, есть тоже A_2'-множество.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ и E множества соответственно типа A_2 и A_2', удовлетворяющие условиям теоремы. Пусть G аналитическое дополнение, проектирующееся в $\mathcal{E}$, а H униформное аналитическое дополнение, проектирующееся в E. Мы можем предположить, что $\mathcal{E}$ и E расположены на оси OX, H расположено в полосе $0 < y < 1$, а G в полосе $1 < y < 2$; присоединим еще одно множество G_1, расположенное в полосе $2 < y < 3$ и полученное смещением вдоль оси OY множества G.

Далее, мы можем предположить, что решета C_1, C_2, C_3, определяющие соответственно H, G и G_1, находятся в пространственных полосах $0 < y < 1$, $1 < y < 2$, $2 < y < 3$, причем решето C_3, определяющее G_1, получено смещением вдоль оси OY решета C_2, определяющего G. Тогда все три решета C_1, C_2 и C_3 могут быть объединены в одно решето C, определяющее аналитическое дополнение

$$H + G + G_1 = Q.$$

Отберем на каждой прямой, параллельной оси OY, точки трансфинитной единственности множества Q. Полученное множество обозначим через U. Множество U есть аналитическое дополнение; оно целиком содержится в множестве H. Но точно так же точки множества H такие, что прямая, параллельная оси OY, через них проходящая, содержит и точки множества G, не принадлежат множеству U. Отсюда следует, что U содержится в H и проектируется в $E - \mathcal{E}$. Тогда множество $H - U$ будет проектироваться в множество $\mathcal{E}$. Но множество $H - U$ есть разность двух аналитических дополнений, и поэтому входит

в класс A_2'-множеств. Следовательно, множество $\mathcal{E}$ есть A_2'-множество.

Ч. Т. Д.

Относительно класса A_2'-множеств остается открытым весьма существенный вопрос о взаимоотношении этого класса с классом A_2-множеств. Естественно было бы думать, что класс A_2 много шире класса A_2', но пока из приведенных теорем мы видим, что все известные свойства A_2'-множеств оказываются в точности такими же, как и A_2-множеств, так что возникает предположение о том, что эти классы совпадают.

В заключение мы покажем, что проблема о взаимоотношении классов A_2- и A_2'-множеств связана с проблемой мощности аналитических дополнений, именно:

Из гипотезы, что класс A_2-множеств шире класса A_2'- множеств, вытекает, что каждое несчетное CA-множество содержит совершенное ядро.

Обратной редукции не получено, но во всяком случае отсюда вытекает, что построить пример A_2-множества, не являющегося A_2'-множеством, не менее «трудно», чем доказать, что мощность всякого несчетного CA-множества есть континуум.

Итак покажем, что из гипотезы, что классы A_2'- и A_2-множеств не совпадают, следует, что каждое несчетное аналитическое дополнение содержит совершенное ядро.

Предположим, что существует некоторое несчетное CA-множество E, не содержащее совершенного ядра. Пусть C есть решето, его определяющее. Возьмем любое множество $\mathcal{E}$ класса A_2. Предположим, что множества E и $\mathcal{E}$ расположены сооответственно на осях OY и OX. Пусть G есть аналитическое дополнение, расположенное в плоскости OXY и проектирующееся в множество $\mathcal{E}$, C'—пространственное решето, его определяющее.

Через каждую точку множества E проведем прямую, параллельную оси OX. Полученное плоское аналитическое дополнение обозначим E^*. Через каждую точку решета C также проведем прямые, параллельные оси OX. Полученное пространственное решето обозначим C^*. Очевидно, что решето C^* определяет множество E^*. Рассмотрим в плоскости OXY множество V, состоящее из всех точек плоскости, для которых индекс решета C^* меньше минимального индекса решета C' на прямой, параллельной оси OY, проходящей через эту точку. На основании леммы IV множество V есть аналитическое дополнение. Оно содержится в множестве E. На прямых, параллельных оси OY и не пересекающих множества $\mathcal{E}$, множество V совпадает с множеством E^*.

Составим разность $E^* - V$; очевидно, она имеет ту же проекцию на ось OX, что и множество G. Кроме того, на каждой прямой, параллельной оси OY, она не содержит совершенного ядра. Очевидно, это есть A_2'-множество. Следовательно, на основании теоремы II проекция его на ось OX есть тоже A_2'-множество. Итак, множество $\mathcal{E}$ есть A_2'-множество.

Математич. институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Novikoff P., Sur les projections des complémentaires analytiques uniformes, Мат. сб. т. 2 (44), № 1, 1937.
[2] Novikoff P. et Lusin N., Choix effectif d'un point etc., Fund. Math. XXV, 1935.
[3] Novikoff P., Sur les separabilités des ensembles projectifs de deuxième classe, Fund. Math. XXV, 1935.

P. NOVIKOFF. SUR QUELQUES RELATIONS ENTRE LES FAMILLES DES ENSEMBLES PROJECTIFS DE CLASSE 2 ET DES PROJECTIONS DES COMPLÉMENTAIRES ANALYTIQUES UNIFORMES

RÉSUMÉ

Le but du présent article est la considération de la famille des ensembles qu'on obtient comme projections des complémentaires analytiques uniformes (nous les avons nommé «ensembles A_2'»).

Le problème de savoir si cette famille coïncide avec celle des ensembles projectifs de deuxième classe (ensembles A_2) reste à resoudre. J'ai demontré dans un travail récent que l'on obtient toujours un ensemble A_2' en prenant la projection d'un complémentaire analytique qui possède au plus un nombre fini de points sur chaque parallèle à l'axe OY. Or, la méthode que j'ai suivi ne permet pas d'étendre ce théorème au cas où le complémentaire analytique considéré possède au plus une infinité dénombrable de points sur chaque parallèle à l'axe OY. Dans le présent article je donne une nouvelle méthode qui permet d'obtenir cette extension; d'ailleurs la même méthode nous donne un lien entre le problème sur le rapport des familles A_2 et A_2' et celui de la puissance des complémentaires analytiques non dénombrables.

Pour démontrer les théorèmes en question nous avons besoin du lemme suivant:

LEMME 1. *Étant donné un crible C définissant un complémentaire analytique E, il existe toujours une suite de cribles $C_1, C_2, \ldots \ldots C_n, \ldots$ définissant des complémentaires analytiques contenus dans E et jouissant de la propriété suivante: quel que soit l'ensemble parfait P, dont l'intersection avec la somme de toutes les constituantes du crible C d'indices $\leqslant \beta$ est un ensemble fini ou dénombrable et qui possède des points dans E_β,—l'un au moins des cribles C_n pos-*

sède une constituante dont l'intersection avec la partie commune de P et de la constituante E_β du crible C est formée d'un seul point.

Voici l'idée de la démonstration de ce lemme: soient

$$E_0,\ E_1, \dots \dots, E_\alpha, \dots \dots$$

les constituantes du complémentaire analytique E défini par le crible C. Soient $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ les intervalles formant le crible C et $\rho_1, \rho_2', \dots, \rho_n, \dots$ les intervalles à extrémités rationnelles contenus dans les intervalles r_n. Soit C_m la partie du crible située au dessous de ρ_m et E_m le complémentaire analytique défini par le crible C_m sur la projection de l'intervalle ρ_m. Soit

$$E_m = E_{m0} + E_{m1} + \dots + E_{m\alpha} + \dots \dots$$

la décomposition de E_m en constituantes $E_{m\alpha}$. Considérons tous les ensembles de la forme

$$P \cdot E_\beta \text{ et } P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1} \cdot E_{m_2\alpha_2} \dots E_{m_k\alpha_k}$$

les m_1, $m_2, \dots, m_k$ étant des entiers quelconques et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ des nombres quelconques de la 1-re ou 2-de classe. Nous démontrons d'abord que l'un au moin de ces ensembles est formé d'un seul point. Alors le lemme peut être démontré aisément.

En effet, supposons le contraire. Alors chacun des ensembles considérés est privé de points isolés, puisque si l'un d'eux, soi

$$P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1} \cdot E_{m_2\alpha_2} \dots E_{m_k\alpha_k}$$

possède un point isolé, on peut trouver des intervalles ρ_{n_1}, $\rho_{n_2}, \dots, \rho_{n_k}$ respectivement contenus dans les intervalles $\rho_{m_1}, \rho_{m_2}, \dots, \rho_{m_k}$ et tels que les projections des ρ_{n_i} ne contiennent que le point isolé de l'ensemble

$$P \cdot E_\beta \cdot E_{n_1\alpha_1} \cdot \dots \cdot E_{n_k\alpha_k}.$$

Dans ce cas l'ensemble

$$P \cdot E_\beta \cdot E_{n_1\alpha_1} \cdot \dots \cdot E_{n_k\alpha_k}$$

est formé de ce point seulement. En poursuivant la démonstration nous construisons un ensemble parfait contenu dans

$$P(E_0 + E_1 + \dots + E_\beta)$$

ce qui conduit à une contradiction. La construction de cet ensemble parfait s'obtient de la manière suivante:

On trouve dans la suite $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ l'intervalle r_{n_1} d'indice minimum tel que sa projection contient des points de l'ensemble $P \cdot E_\beta$; dans ce cas nous pouvons choisir deux intervalles ρ_{m_1} et ρ_{m_2} contenus dans r_{n_1}, sans point commun, et tels que leurs projections contiennent une infinité de points de $P \cdot E_\beta$. Il est alors évident que les complémentaires analytiques E_{m_1} et E_{m_2} possèdent des points de $P \cdot E_\beta$.

Soient

$$E_{m_1\alpha_1} \text{ et } E_{m_2\alpha_2}$$

les constituantes de E_{m_1} et E_{m_2} d'indices minima α_1 et α_2 pour lesquelles

$$P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1} \text{ et } P \cdot E_\beta \cdot E_{m_2\alpha_2}$$

ne sont pas vides. Mais les ensembles

$$P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1} \text{ et } P \cdot E_\beta \cdot E_{m_2\alpha_2}$$

sont encore privés de points isolés. Nous prenons alors deux intervalles d'indices minima r_{n_2} et r_{n_3} tels que la projection de r_{n_2} contient des points de $P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1}$ et la projection de r_{n_3} contient des points de $P \cdot E_\beta \cdot E_{m_2\alpha_2}$. Nous choisissons ensuite 4 intervalles ρ_{m_3}, ρ_{m_4}, ρ_{m_5}, ρ_{m_6} dont les projections sont deux à deux sans points communs, ρ_{m_3} et ρ_{m_4} étant contenus dans r_{n_2} et les deux autres dans r_{n_3}; les projections de ρ_{m_3} et ρ_{m_4} contiennent des points de $P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1}$ et les projections de ρ_{m_5} et ρ_{m_6} des points de $P \cdot E_\beta \cdot E_{m_2\alpha_2}$. Ce procédé peut être poursuivi d'une manière analogue et l'on obtient les systèmes d'intervalles tels que chaque système suivant est contenu dans le précédent. La partie commune de tous ces systèmes est un certain ensemble parfait H; on démontre qu'il est contenu dans

$$P \cdot (E_0 + E_1 + \dots + E_\beta).$$

La manière de construire cet ensemble H et cette démonstration sont tout à fait analogues à celles que j'ai donné dans mon article «Choix effectif etc.» en montrant comment on trouve effectivement un point dans un complémentaire analytique.

Nous nous appuyons ensuite sur le lemme suivant démontré également dans cet article: la partie commune d'un nombre fini de complémentaires analytiques $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ peut être définie au moyen d'un crible C ayant la propriété suivante: chaque constituante de l'ensemble $\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2 \cdot \dots \cdot \mathcal{E}_n$ est la partie commune d'un système de constituantes $\mathcal{E}_{1\beta_1}, \cdot \mathcal{E}_{2\beta_2}, \dots, \mathcal{E}_{n\beta_n}$ et vice versa. Construisons donc pour chaque ensemble

$$E \cdot E_{m_1} \cdot E_{m_2} \dots E_{m_k}$$

un crible $C_{m_1 m_2 \dots m_k}$ vérifiant les conditions du lemme que nous venons d'énoncer. Nous avons démontré qu'un certain ensemble

$$P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1} \cdot E_{m_2\alpha_2} \cdot \dots \cdot E_{m_k\alpha_k}$$

est formé d'un seul point. Donc le crible $C_{m_1 m_2 \dots m_k}$ a une constituante ayant un et un seul point commun avec P. Le lemme est ainsi démontré.

Ce lemme étant démontré nous introduisons la définition suivante.

Définition. Soit E un complémentaire analytique situé dans le plan OXY, et C un crible définissant E et situé dans l'espace $OXYZ$. Nous dirons qu'un point (x_0, y_0) de E est un point d'indice unique, si la constituante de E qui contient ce point ne possède aucun autre point sur la droite $x = x_0$.

Cette définition posée, on a le

LEMME 2. *Étant donné un complémentaire analytique quelconque, l'ensemble de ses points d'indice unique est toujours un com-*

plémentaire analytique et il peut être uniformisé au moyen d'un ensemble de même nature.

Ces deux lemmes permettent de démontrer les théorèmes suivants:

THÉORÈME I. *Soit E un complémentaire analytique jouissant de la propriété suivante: sur chaque parallèle à l'axe OY qui coupe l'ensemble E, la constituante inférieure ayant des points sur cette parallèle est au plus dénombrable. Dans ces conditions la projection de E sur l'axe OX est un ensemble A'_2.*

Corollaire. Si E est un complémentaire analytique qui est au plus dénombrable sur chaque droite parallèle à l'axe OY, la projection de E sur OX est un ensemble A'_2.

Ce théorème peut être généralisé. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble A'_2 et E l'ensemble CA uniforme, dont il est la projection. Convenons d'appeler indice d'un point de $\mathcal{E}$ l'indice du point de E dont il est la projection. L'ensemble A'_2 est ainsi décomposé en $\aleph_1$ constituantes mesurables B de même que les ensembles CA. D'une manière analogue, si $\mathcal{E}$ est un ensemble A_2 et E l'ensemble CA dont il est la projection, on peut appeler indice d'un point de $\mathcal{E}$ l'indice minimum des points de E ayant ce point pour projection.

Ces définitions posées, le théorème I peut être généralisé de la manière suivante:

THÉORÈME II. *Si E est un ensemble A'_2 dont la constituante inférieure est au plus dénombrable sur chaque parallèle à l'axe OY, la projection de E sur l'axe OX est un ensemble A'_2.*

On a aussi les théorèmes suivants:

THÉORÈME III. *Chaque ensemble A_2 est la projection d'un ensemble CA dont toutes les intersections avec les droites parallèles à l'axe OY sont mesurables B.*

THÉORÈME IV. *Chaque ensemble A_2 contenu dans un ensemble A'_2 et tel qu'en chaque point son indice minimum est inférieur à l'indice au même point de l'ensemble A'_2 considéré, est lui-même un ensemble A'_2.*

Nous avons déjà dit que la question très importante sur le rapport entre la famille des ensembles A_2 et des A'_2 reste à résoudre. Il paraissait probable que la famille des A_2 est beaucoup plus vaste que celle des A'_2. Mais les résultats de cet article et de l'article précédent nous montrent que toutes les propriétés connues des ensembles A_2 appartiennent également aux ensembles A'_2. On peut croire que ces familles d'ensembles coïncident. Nous démontrons dans cet article que le problème sur le rapport des familles A_2 et A'_2 est lié à l'étude de la puissance des complémentaires analytiques.

Plus précisément, *si l'on suppose que la famille des ensembles A_2 est plus vaste que celle des ensembles A'_2 on peut démontrer que cha-*

que complémentaire analytique non dénombrable contient un ensemble parfait. La proposition inverse n'est pas démontrée.

En étudiant les problèmes liés à celui de la puissance des ensembles CA, nous avons obtenu le résultat suivant:

si chaque ensemble AC non dénombrable possède une constituante qui contient deux points au moins, tout ensemble CA non dénombrable contient un ensemble parfait.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

П. С. НОВИКОВ

ОТДЕЛИМОСТЬ C-МНОЖЕСТВ *

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье обобщен принцип отражения на случай произвольных решет. Доказаны I и II теоремы отделимости для произвольных тел, инвариантных относительно (A)-операции, в частности для C-множеств.

C-множества являются результатом последовательного применения двух операций: A-операции и взятия дополнения в конечном или счетном числе раз, отправляясь от интервалов [см. ([2]), стр. 289 и ([3])]. В результате применения этих операций получим $\aleph_1$ классов множеств:

$$C_0, \ C_1, \ldots, C_n, \ldots, C_\omega, \ldots, C_\alpha, \ldots \ldots /\Omega,$$

из которых C_0 представляет собой совокупность аналитических множеств, а класс C_α получается с помощью (A)-операции над дополнениями к множествам классов $C_{\alpha'}$, где $\alpha' < \alpha$. В настоящей работе мы установим следующее свойство множеств класса C_α: каждые два C_α-множества без общей точки отделимы множествами максимального тела этого класса. Этот результат является обобщением известной теоремы Н. Н. Лузина для аналитических множеств. Для доказательства этого предложения нам нужно будет усилить принцип отражения [см. ([2]), стр. 211—215, или ([4])]. Для этой цели мы введем некоторые вспомогательные понятия.

Рассмотрим совокупность всех рациональных чисел и представим ее в виде последовательности

$$r_1, \ r_2, \ \ldots, \ r_n, \ \ldots \tag{1}$$

Назовем элементарным отражением соответствие, сохраняющее порядок по отношению к величине чисел между двумя конечными группами рациональных чисел

$$r_{n_1}, \ r_{n_2}, \ \ldots, \ r_{n_k} \ \text{и} \ r_{m_1}, \ r_{m_2}, \ \ldots, \ r_{m_k}.$$

* Результаты этой работы были эвонсированы мною в «Докладах» Академии Наук СССР ([1]).

Подобное элементарное отражение мы будем записывать в виде следующего символа:

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} \end{pmatrix},$$

причем будем всегда предполагать, что числа $n_1, n_2, \dots, n_k$ расположены в возрастающем порядке.

Пусть

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} r_{q_1} & r_{q_2} & \dots & r_{q_t} \\ r_{s_1} & r_{s_2} & \dots & r_{s_t} \end{pmatrix}, \quad k > t$$

два элементарных отражения. Мы скажем, что первое есть продолжение второго, если

$$n_1 = q_1, \ n_2 = q_2, \ \dots, \ n_t = q_t,$$
$$m_1 = s_1, \ m_2 = s_2, \ \dots, \ m_t = s_t.$$

Пусть дано отражение

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} \end{pmatrix}.$$

Число k мы назовем рангом отражения. Будем считать, что два отражения совпадают тогда и только тогда, когда изображающие их символы тождественны.

Рассмотрим систему интервалов $\{\delta_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$, обладающую следующими свойствами:

$$\delta_{n_1 n_2 \dots n_{k-1} q}$$

не имеют попарно общих точек, если $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$ фиксированы, а q принимает значения 1, 2, 3, ... ,

$$\delta_{n_1 n_2 \dots n_k} \supset \delta_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}.$$

Пусть, кроме того, среди всех этих интервалов нет двух одинаковой длины.

Поставим во взаимно-однозначное соответствие элементарные отражения первого ранга и интервалы δ_{n_1} первого ранга. Предположим, что каким-то образом мы установили взаимно-однозначное соответствие между отражениями k-го ранга и интервалами $\delta_{n_1 n_2 \dots n_k}$ k-го ранга.

Пусть

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} \end{pmatrix} \qquad (a)$$

некоторое отражение k-го ранга и $\delta_{n_1 n_2 \dots n_k}$ соответствующий ем интервал.

Рассмотрим совокупность отражений

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} & r_{n_{k+1}} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} & r_{m_{k+1}} \end{pmatrix},$$

где $n_1, n_2, \dots, n_k$ и $m_1, m_2, \dots, m_k$ фиксированы, n_{k+1} пробегает все целые числа $> n_k$, а m_{k+1} при всяком n_{k+1} пробегает все те значения, при которых сохраняется подобие. Установим взаимно-однозначное соответствие между этой совокупностью и совокупностью всех интервалов $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}$, где $i_1, i_2, \dots, i_k$ фиксированы, а i_{k+1} принимает все целые значения.

Таким образом мы поставили во взаимно-однозначное соответствие множество всех элементарных отражений и множество всех интервалов $\delta_{i_1 \dots i_k}$. Это соответствие, очевидно, обладает следующими свойствами:

Если из двух отражений одно есть продолжение другого, то интервал, соответствующий второму, содержится в интервале, соответствующем первому, и обратно: если два интервала вложены один в другой, то соответствующие отражения представляют продолжение одно другого.

Двум различным отражениям одного и того же ранга отвечают неперекрывающиеся интервалы того же ранга, и обратно.

Две последовательности рациональных чисел, взятые в определенном порядке, определяют систему интервалов $\delta_{p_1 p_2 \dots p_k}$, отвечающих отражениям

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} \end{pmatrix},$$

где $r_{n_1}, r_{n_2}, \dots, r_{n_k}$ суть первые k членов первой последовательности, а $r_{m_1}, r_{m_2}, \dots, r_{m_k}$ принадлежат второй последовательности; причем $n_1 < n_2 < \dots < n_k$.

Множество

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} \delta_{p_1 p_2 \dots p_k} = h$$

не пусто тогда и только тогда, когда вся первая последовательность отражается подобно на часть второй*.

В самом деле, пусть первая последовательность $r_{n_1}, r_{n_2}, \dots, r_{n_k}, \dots$ отражается подобно на часть второй; пусть $r_{m_1}, r_{m_2}, \dots r_{m_k}, \dots$ будет эта часть. Запишем это отражение в виде следующей таблицы:

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} & \dots \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} & \dots \end{pmatrix}.$$

Тогда существует бесконечная последовательность элементарных отражений вида (a):

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} \\ r_{m_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} \\ r_{m_1} & r_{m_2} \end{pmatrix}, \dots$$

* Множество h есть произведение по k сумм всех интервалов $\delta_{p_1 \dots l}$ ранга k.

составляющих продолжение одно другого. Но тогда в силу установленного соответствия между отражениями и интервалами $\delta_{n_1 \ldots n_k}$ мы будем иметь последовательность интервалов $\delta_{p_1}, \delta_{p_1 p_2}, \ldots$, вложенных один в другой. Следовательно, пересечение их не пусто, и так как точка, являющаяся их пересечением, входит в h, то h не пусто. Обратно, предположим, что h не пусто. Тогда существует последовательность интервалов $\delta_{p_1} \supset \delta_{p_1 p_2} \supset \ldots$; но тогда существует последовательность отражений, отвечающих этим интервалам и составляющих продолжение одно другого:

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} \\ r_{m_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} \\ r_{m_1} & r_{m_2} \end{pmatrix}, \ldots$$

Очевидно, последовательность $r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots$ отражается подобно на последовательность $r_{m_1}, r_{m_2}, \ldots$, которая есть часть второй из рассматриваемых нами последовательностей.

Пусть π есть некоторый прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, c — некоторое множество, расположенное на одной из его сторон. Множество точек прямоугольника π, проектирующихся ортогонально в c, мы будем называть гребенчатым множеством или гребенкой. Само множество c мы назовем основанием гребенки.

Легко видеть, что если мы имеем проекцию на ось OX пересечения счетного числа счетных сумм гребенок, то эту проекцию можно представить как (A)-операцию над множествами, являющимися проекциями гребенок на ось OX, и обратно. Поэтому, если все гребенки суть C-множества класса α, то рассматриваемая проекция пересечения будет тоже C-множество класса α.

Обозначим через $P_y^{x_0}$ перпендикуляр к оси OX в точке x_0.

Мы докажем следующую лемму:

ЛЕММА. *Пусть C_1 и C_2 суть два решета, составленные из C-множеств класса α, принадлежащих максимальному телу этого класса и расположенных на отрезках, параллельных оси OX с рациональными ординатами; тогда совокупность тех точек x_0 оси OX, для которых $P_y^{x_0} \cdot C_1$ отражается подобно на часть множества $P_y^{x_0} \cdot C_2$, есть C-множество класса α.*

Доказательство. Мы будем в дальнейшем обозначать множество точек x_0, удовлетворяющих условиям леммы, через L.

Рассмотрим квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1$. Мы можем предполагать, что оба решета C_1 и C_2 содержатся внутри этого квадрата. Пусть x_0 точка оси OX; тогда множества $P_y^{x_0} \cdot C_1$ и $P_y^{x_0} \cdot C_2$, которые мы в дальнейшем будем называть множествами вида (c), представляют собой две совокупности рациональных точек и являются частями последовательности (1).

Таким двум счетным частям, рассмотренным как последовательности с членами, занумерованными теми же номерами, какие

они имеют в последовательности (1), мы поставим в соответствие систему интервалов $\delta_{p_1p_2\ldots p_k}$, отвечающих элементарным отражениям вида (a) между конечными частями последовательностей (c), причем отражение ранга k содержит k первых по порядку в последовательности (1) элементов множества $P_y^{x_0}\cdot C_1$.

Все эти интервалы мы расположим на сегменте $x=x_0$; $-1\leqslant \leqslant y_0\leqslant 0$ и будем их записывать в виде $\delta^{x_0}_{p_1p_2\ldots p_k}$, так как они зависят от точки x_0.

Множество

$$\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{p_1p_2\ldots p_k}\delta^{x_0}_{p_1p_2\ldots p_k}$$

будем обозначать h^{x_0}, а сумму h^{x_0} по всем x_0 просто h. Из предыдущего следует, что $P_y^{x_0}\cdot C_1$ отражается подобно на часть $P_y^{x_0}\cdot C_2$ для тех и только для тех точек x_0, для которых пересечение $P_y^{x_0}\cdot h=h^{x_0}$ не пусто. Иначе говоря, L есть проекция h на ось OX.

Пусть $h_{p_1p_2\ldots p_k}$ есть $\sum\limits_{x_0}\delta^{x_0}_{p_1p_2\ldots p_k}$ (суммирование ведется по всем x_0; индексы p_1, p_2, ..., p_k постоянны). Множество $P_y^{x_0}\cdot h_{p_1p_2\ldots p_k}$ совпадает с $\delta^{x_0}_{p_1p_2\ldots p_k}$.

Если даны два множества $h_{p_1p_2\ldots p_k}$ и $h_{p_1p_2\ldots p_k\ldots p_q}$, то второе содержится в первом.

Аналогичным образом мы получим обратное утверждение, т. е. что если какие-либо индексы двух множеств $h_{p_1p_2\ldots p_k}$ и $h_{p'_1p'_2\ldots p'_q}$, имеющие один и тот же номер, различны, то $h_{p_1p_2\ldots p_k}$ и $h_{p'_1p'_2\ldots p'_q}$ не имеют общих точек. Все множества $h_{p_1p_2\ldots p_k}$ суть множества гребенчатые.

Рассмотрим выражение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{p_1p_2\ldots p_k}h_{p_1p_2\ldots p_k}.$$

Нетрудно видеть, что это будет h. В самом деле, это выражение мы можем написать следующим образом:

$$\sum_{x_0}P_y^{x_0}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{p_1p_2\ldots p_k}h_{p_1p_2\ldots p_k}$$

или

$$\sum_{x_0}\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{p_1p_2\ldots p_k}P_y^{x_0}\cdot h_{p_1p_2\ldots p_k}$$

или еще

$$\sum_{x_0}^{\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{p_1p_2\ldots p_k}\delta^{x_0}_{p_1p_2\ldots p_k}=\sum_{x_0}h^{x_0}=h.$$

Следовательно, h есть пересечение сумм гребенчатых множеств.

Для того чтобы доказать, что L есть C-множество класса α, достаточно показать, что множества $h_{p_1p_2\ldots p_k}$ суть C-множества класса α, так как L есть проекция h.

Каждому множеству $h_{p_1p_2\ldots p_k}$ можно поставить в соответствие один интервал системы δ, именно $\delta_{p_1p_2\ldots p_k}$, а так как этому интервалу поставлено нами в соответствие определенное отражение типа (a), то это отражение мы можем поставить в соответствие множеству $h_{p_1p_2\ldots p_k}$.

Пусть это будет

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \ldots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \ldots & r_{m_k} \end{pmatrix}$$

Согласно нашему построению для всякой точки x_0, для которой $P_y^{x_0} \cdot h_{p_1p_2\ldots p_k}$ не пусто, среди точек множества $P_y^{x_0} \cdot C_1$ найдутся точки с ординатами $r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_k}$, а среди точек $P_y^{x_0} \cdot C_2$ точки с ординатами $r_{m_1}, r_{m_2}, \ldots, r_{m_k}$.

Далее, в ряду чисел $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ ординатами точек $P_y^{x_0} \cdot C_1$ будут только числа $r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_k}, \ldots$

Итак, пусть отражение

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \ldots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \ldots & r_{m_k} \end{pmatrix}$$

соответствует множеству $h_{p_1p_2\ldots p_k}$. Обозначим через $\Pi_x(M)$ проекцию множества M на ось OX и через P_x^a линию, параллельную оси OX и проходящую через точку a.

Рассмотрим следующее множество:

$$M_{p_1p_2\ldots p_k} = \Pi_x(P_x^{r_{n_1}} \cdot C_1) \cdot \Pi_x(P_x^{r_{n_2}} \cdot C_1) \cdot \ldots \cdot \Pi_x(P_x^{r_{n_k}} \cdot C_1) \cdot$$
$$\cdot \Pi_x(P_x^{r_{m_1}} \cdot C_2) \cdot \Pi_x(P_x^{r_{m_2}} \cdot C_2) \cdot \ldots \cdot \Pi_x(P_x^{r_{m_k}} \cdot C_2) -$$
$$- \Pi_x(P_x^{r_{i_1}} \cdot C_1) - \Pi_x(P_x^{r_{i_2}} \cdot C_1) - \ldots - \Pi_x(P_x^{r_{i_q}} \cdot C_1),$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_q$ суть все номера, меньшие n_k и не совпадающие с числами $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Очевидно, $M_{p_1p_2\ldots p_k}$ есть C-множество класса α. Покажем, что $M_{p_1p_2\ldots p_k}$ есть $\Pi_x(h_{p_1p_2\ldots p_k})$.

Пусть x_0 есть точка проекции $h_{p_1p_2\ldots p_k}$, тогда $P_y^{x_0} \cdot C_1$ будет содержать точки $r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_k}$ и $P_y^{x_0} \cdot C_2$ точки $r_{m_1}, r_{m_2}, \ldots, r_{m_k}$ и, следовательно, x_0 входит в проекцию каждого из множеств $P_x^{r_{n_j}} \cdot C_1$ и $P_x^{r_{m_j}} \cdot C_2$ для любого j от 1 до k. Пересечение проекций этих множеств содержит точку x_0; надо еще показать, что x_0 не входит ни в одно из множеств $\Pi_x(P^{r_{i_j}} \cdot C_1), j \leqslant q$. В самом деле, если бы x_0 принадлежала одному из этих множеств, например $\Pi_x(P_x^{r_{i_j}}, C_1)$, то среди точек множества $P_y^{x_0} \cdot C_1$ нашлась бы точка

с ординатой r_{i_j}, а так как $i_j \leqslant n_k$, то i_j совпадала бы с одним из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, чего нет на самом деле.

Итак, x_0 не входит ни в одно из множеств $\Pi_x(P_y^{r_{i_j}} \cdot C_1)$ и, следовательно, входит в $M_{p_1p_2\ldots p_k}$.

Предположим обратное, что точка x_0 принадлежит $M_{p_1p_2\ldots p_k}$. Покажем, что в таком случае она будет принадлежать и $\Pi_x(h_{p_1p_2\ldots p_k})$. Для этого достаточно доказать, что среди элементарных отражений вида (a) между точками множеств $P_y^{x_0} \cdot C_1$ и $P_y^{x_0} \cdot C_2$ найдется отражение $\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \ldots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \ldots & r_{m_k} \end{pmatrix}$, потому что тогда на прямой $P_y^{x_0}$ найдется соответствующий этому отражению интервал $\delta^{x_0}_{p_1p_2\ldots p_k} = P_y^{x_0} \cdot h_{p_1p_2\ldots p_k}$ и, следовательно, $x_0 \subset \Pi_x(h_{p_1p_2\ldots p_k})$.

Так как точка x_0 входит в $M_{p_1p_2\ldots p_k}$, то она, во-первых, будет принадлежать всем множествам $\Pi_x(P_x^{r_{n_j}} \cdot C_1)$ и $\Pi_x(P_x^{r_{m_j}} \cdot C_2)$, $1 \leqslant j \leqslant k$; во-вторых, не будет принадлежать ни одному из множеств $\Pi_x(P_x^{r_{i_j}} \cdot C_1)$, $1 \leqslant j \leqslant q$.

Из этого следует, что на прямой $P_y^{x_0}$ найдутся все точки $r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_k}, r_{m_1}, r_{m_2}, \ldots, r_{m_k}$ и не будет ни одной из точек $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_k}$.

Отсюда ясно, что среди отражений вида (a) k-го ранга между точками множеств $P_y^{x_0} \cdot C_1$ и $P_y^{x_0} \cdot C_2$ найдется отражение

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \ldots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \ldots & r_{m_k} \end{pmatrix}.$$

Итак, мы доказали, что множества $M_{p_1p_2\ldots p_k}$ и $\Pi_x(h_{p_1p_2\ldots p_k})$ совпадают. Отсюда следует, что гребенчатое множество $h_{p_1p_2\ldots p_k}$ есть C-множество класса α и, следовательно, h, которое есть пересечение сумм таких гребенчатых множеств, тоже есть C-множество класса α; проекция его L есть тоже C-множество класса α.

Ч. Т. Д.

ТЕОРЕМА I. *Каждые два C-множества класса α без общей точки отделимы двумя множествами максимального тела.*

Доказательство. Каждое C-множество класса α может быть определено некоторым решетом, составленным из множеств максимального тела подобно тому, как аналитические множества определяются решетами, составленными из B-множеств. Решето это можно предполагать правильным *. Пусть E_1 и E_2 суть C-множества класса α, не имеющие общих точек; C_1—правильное решето, составленное из множеств максимального тела, определяющее E_1, а C_2—такое же решето, определяющее E_2. Мы можем, конечно,

* Решето C называется правильным, если всякое множество $P_y^{x_0} \cdot C$ либо вполне упорядочено в положительном направлении, либо плотно на себе. Всякое множество, заданное решетом, может быть задано правильным решетом. См. лит. ([5]).

предположить, что оба эти решета не имеют одинаковых трансфинитных индексов, соответствующих внешним конституантам.

Рассмотрим множество точек оси OX, для которых $P_y^{x_0} \cdot C_1$ отражается подобно на часть $P_y^{x_0} \cdot C_2$. Обозначим это множество H_2. В силу доказанной леммы это есть C-множество класса α и, кроме того, $H_2 \supset E_2$. В самом деле, решета C_1 и C_2 правильные, и если точка $x_0 \subset E_2$, то $P_y^{x_0} \cdot C_2$ неприводимо, откуда следует, что $P_y^{x_0} \cdot C_1$ отражается подобно на часть $P_y^{x_0} \cdot C_2$. Точно так же мы видим, что множество точек оси OX, для которых $P_y^{x_0} \cdot C_2$ отражается подобно на часть $P_y^{x_0} \cdot C_1$ есть C-множество класса α и содержит E_1. Обозначим это множество через H_1. Множества H_1 и H_2 не могут иметь общих точек, так как это означало бы, что существует точка x_0, для которой оба множества $P_y^{x_0} \cdot C_1$ и $P_y^{x_0} \cdot C_2$ неприводимы, но такая точка принадлежала бы $E_1 \cdot E_2$, чего не может быть. Теперь остается показать, что H_1 и H_2 принадлежат максимальному телу. Это следует из того, что $H_1 + H_2$ представляют собою всю ось OX.

Ч. Т. Д.

ТЕОРЕМА II. *Если у двух C-множеств класса α удалить их общую часть, то оставшиеся части отделимы множествами, дополнительными к C-множествам класса α.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично предыдущему.

ТЕОРЕМА III. *Если пересечение счетного числа $E_1, E_2, \dots, E_n \dots$ C-множеств класса α пусто, то существует счетное число множеств, принадлежащих максимальному телу класса α, $H_1, H_2, \dots, H_n \dots$, пересечение которых также пусто и $H_n \subset E_n$ для каждого α.*

Доказательство. Пусть $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ правильные решета, определяющие соответственно множества E_n. Решета C_i мы можем предполагать попарно без общих индексов, для этого достаточно к решету C_n присоединить сверху систему прямых, параллельных оси OX, ординаты которых образуют вполне упорядоченное множество в положительном направлении типа ω^n.

Пусть H_i' есть множество точек оси OX, для которых $P_y^{x_0} \cdot C_i$ не отражается подобно ни на какую часть, хотя бы одного из множеств $P_y^{x_0} \cdot C_j$, $j \neq i$. Легко видеть, что $H_i' \supset E_i$. Обозначим множество точек, дополнительное к H_i', через H_i^*. Очевидно, что H_i^*—это множество всех тех точек, для которых $P_y^{x_0} \cdot C_i$ отражается подобно на часть всякого множества $P_y^{x_0} \cdot C_j$. В силу доказанной леммы H_i^* будет C-множество класса α, а H_i'—множество, дополнительное к C-множеству класса α. Очевидно, что множества H^* попарно не имеют общих точек и покрывают всю ось OX.

Отсюда следует, что H_i^*, а следовательно, и H_i' принадлежат максимальному телу.

Мы видим, что $H_i' \supset E_i$ и $H_1' \cdot H_2' \cdot \ldots \cdot H_n' \cdot \ldots = 0$.

Ч. Т. Д.

Аналогичным образом доказывается

ТЕОРЕМА IV. *Если у счетной системы С-множеств класса α удалить общую часть, то оставшиеся части кратно-отделимы множествами, дополнительными к С-множествам класса α.*

Совершенно очевидно, что все изложенные результаты справедливы для какого угодно семейства множеств, получаемого из некоторой исходной системы с помощью применения (A)-операции и операции дополнения.

Математич. институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
10. I. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Новиков П. С., О некоторых системах множеств..., ДАН, III, № 8—9, 1934.

[2] Lusin N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930.

[3] Селивановский Е. А., Об одном классе эффективных множеств, Мат. сб. XXXV, стр. 379—413.

[4] Novikoff P., Sur les fonctions implicites, Fund. Math. XVII, pp. 8—25.

[5] Новиков П. С., Обобщение второго принципа отделимости, ДАН, IV, № 1—2, 1934.

P. NOVIKOFF. LA SEPARABILITÉ DES ENSEMBLES C

RÉSUMÉ

On appèlle ensembles C les ensembles que l'on obtient à partir des ensembles mésurables B en effectuant l'opération (A) et prenant le complémentaire, un nombre fini ou dénombrable de fois.

Il est connu, que l'opération (A) peut être remplacée par l'opération de crible. Cela étant, nous allons considérer les cribles plans formés des ensembles C linéaires de classe α appartenant au corps maximum de cette classe et situés sur des droites parallèles à l'axe OX à des distances rationnelles. Nous appèlerons un tel crible «crible C de classe α». On sait que chaque ensemble C de classe α peut être obtenu au moyen d'un tel crible. Nous désignons par $P_y^{x_0}$ la droite parallèle à l'axe OX passant par le point x_0 et par $P_y^{x_0} \cdot C$ la partie du crible C située sur cette droite. Nous démontrons le lemme suivant:

LEMME. *Soient C_1 et C_2 deux cribles C de classe α. L'ensemble de tous les points x_0 de l'axe OX, tels que l'ensemble $P_y^{x_0} \cdot C_1$ est semblable à une partie de $P_y^{x_0} \cdot C_2$, est un ensemble C de classe α.*

Soit L l'ensemble en question. Pour démontrer ce lemme nous introduisons une nouvelle notion. Soit

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \tag{1}$$

la suite de tous les nombres rationnels de l'intervalle (0, 1). Considérons deux groupes de nombres rationnels semblables entre eux:

$$r_{n_1},\ r_{n_2},\ \ldots,\ r_{n_k}\ (n_1 < n_2 < \ldots < n_k) \text{ et } r_{m_1},\ r_{m_2},\ \ldots,\ r_{m_k}.$$

Nous appelerons similitude élémentaire la correspondance de similitude entre ces deux groupes, et nous la désignérons par

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \ldots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \ldots & r_{m_k} \end{pmatrix}.$$

Le nombre k est le rang de la similitude. Nous dirons que la similitude élémentaire

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \ldots & r_{n_k} & r_{n_{k+1}} & \ldots & r_{n_q} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \ldots & r_{m_k} & r_{m_{k+1}} & \ldots & r_{m_q} \end{pmatrix}$$

est le prolongement de la similitude élémentaire

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \ldots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \ldots & r_{m_k} \end{pmatrix}.$$

Nous considérons un système d'intervalles $\{\delta_{p_1 p_2 \ldots p_k}\}$ tel que deux intervalles quelconques du même rang k n'ont aucun point commun, et $\delta_{p_1 p_2 \ldots p_k} \supset \delta_{p_1 p_2 \ldots p_k p_{k+1}}$.

Nous faisons une correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble des similitudes élémentaires et l'ensemble de ces intervalles de manière suivante: à chaque similitude élémentaire de rang k correspond un intervalle de rang k et inversement, et si une similitude élémentaire de rang $k+1$ est le prolongement d'une autre similitude élémentaire de rang k, l'intervalle de rang $k+1$ correspondant à la première est contenu dans l'intervalle de rang k qui correspond à la seconde.

Nous considérons maintenant toutes les similitudes élémentaires entre les parties des ensembles $P_y^{x_0} \cdot C_1$ et $P_y^{x_0} \cdot C_2$ telles que la similitude

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \ldots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \ldots & r_{m_k} \end{pmatrix}$$

de rang k contient les éléments de $P_y^{x_0} \cdot C_1$ ayant dans la suite (1) les k indices inférieurs, et nous situons sur le segment $x = x_0$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$ les intervalles correspondant à ces similitudes.

Nous désignons ces intervalles par $\delta^{x_0}_{p_1 p_2 \ldots p_k}$.

On démontre facilement que l'ensemble

$$h^{x_0} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{p_1 p_2 \ldots p_k} \delta^{x_0}_{p_1 p_2 \ldots p_k}$$

contient un point dans le cas et dans ce cas seulement où l'ensemble $P_y^{x_0} \cdot C_1$ est semblable à une partie de l'ensemble $P_y^{x_0} \cdot C_2$. Donc, l'ensemble L est la projection orthogonale de l'ensemble $h = \sum_{x_0} h^{x_0}$.

Désignons par $h_{p_1p_2\ldots p_k}$ l'ensemble $\sum_{x_0} \delta^{x_0}_{p_1p_2\ldots p_k}$ les indices $p_1, p_2, \ldots, p_k$ étant constants. On a

$$h = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{p_1p_2\ldots p_k} h_{p_1p_2\ldots p_k}.$$

Maintenant pour démontrer notre lemme il nous reste à démontrer que $h_{p_1p_2\ldots p_k}$ est un ensemble C de classe α. Nous désignons la projection d'un ensemble M sur l'axe OX par $\Pi_x(M)$ et une droite parallèle à l'axe OX ayant l'ordonnée a par P^a_x et nous considérons l'ensemble:

$$\begin{aligned} M_{p_1p_2\ldots p_k} = \Pi_x(P^{r_{n_1}}_x \cdot C_1) \cdot \Pi_x(P^{r_{n_2}}_x \cdot C_1) \cdot \ldots \cdot \Pi_x(P^{r_{n_k}}_x \cdot C_1) \cdot \\ \cdot \Pi_x(P^{r_{m_1}}_x \cdot C_2) \cdot \Pi_x(P^{r_{m_2}}_x \cdot C_2) \cdot \ldots \cdot \Pi_x(P^{r_{m_k}}_x \cdot C_2) - \\ - \Pi_x(P^{r_{i_1}}_x \cdot C_1) - \Pi_x(P^{r_{i_2}}_x \cdot C_1) - \ldots - \Pi_x(P^{r_{i_q}}_x \cdot C_1) \end{aligned}$$

où $i_1, i_2, \ldots, i_q$ sont tous les nombres inférieurs à n_k qui ne coïncident avec aucun des nombres $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

L'ensemble $M_{p_1p_2\ldots p_k}$ est evidemment un ensemble C de classe α. Nous démontrons que $M_{p_1p_2\ldots p_k}$ coïncide avec la projection sur l'axe OX de $h_{p_1p_2\ldots p_k}$. Et comme $h_{p_1p_2\ldots p_k}$ est un ensemble peigné *, il est encore un ensemble C de classe α.

Il suit de là l'énoncé de notre lemme.

Ce lemme étant démontré, nous obtenons les théorèmes suivants sur la séparabilité des ensembles C.

Nous supposons encore dans la suite que tous les cribles que nous considérons sont des cribles réguliers **.

THÉORÈME I. *Deux ensembles C de classe α n'ayant aucun point commun sont séparables au moyen d'ensembles appartenant au corps maximum de cette classe.*

Soient E_1 et E_2 deux ensembles C de classe α définis au moyen des cribles C_1 et C_2, sans indices communs. Nous considérons l'ensemble H_2 des points de l'axe OX tels que $P^{x_0}_y \cdot C_1$ est semblable à une partie de $P^{x_0}_y \cdot C_2$ et l'ensemble H_1 des points de l'axe OX tels que $P^{x_0}_y \cdot C_2$ est semblable à une partie de $P^{x_0}_y \cdot C_1$. D'après notre lemme, les ensembles H_1 et H_2 sont des ensembles C de classe α. Nous démontrons que $E_1 \subset H_1$, $E_2 \subset H_2$, $H_1 \cdot H_2 = 0$ et que la somme $H_1 + H_2$ coïncide avec le segment $(0, 1)$ de l'axe OX, par

---

* Ensemble peigné — l'ensemble des points d'un rectangle dont les projections orthogonales sur un coté de ce réctangle appartiennent à un ensemble linéaire, fixé à l'avance.

** Un crible C est un crible régulier si l'ensemble $P^{x_0}_y \cdot C$ possède une partie dense en soi chaque fois que le point x_0 appartient à l'ensemble criblé. Chaque ensemble déterminé au moyen d'un crible peut être déterminé au moyen d'un crible régulier. Voir ([5]).

suite les ensembles H_1 et H_2 appartiennent au corps maximum de la classe α.

THÉORÈME II. *Si l'on supprime de deux ensembles C de classe α leur partie commune, les parties restantes sont séparables au moyen d'ensembles complèmentaires aux ensembles C de classe α.*

La démonstration de ce théorème est toute analogue à celle du théorème I.

THÉORÈME III. *Étant donnée une infinité dénombrable d'ensembles C de classe α tels qu'il n'existe aucun point commun à tous ces ensembles, il existe une infinité dénombrable d'ensembles appartenant au corps maximum de classe α et renfermant respectivement les ensembles donnés et tels qu'il n'existe aucun point appartenant à tous ces ensembles simultanément.*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ les ensembles C de classe α sans points communs et $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ les cribles réguliers qui définissent ces ensembles. On peut supposer tous ces cribles sans indices communs deux à deux. Nous considérons l'ensemble H_i de tous les points de l'axe OX tels que l'ensemble $P_y^{x_0} \cdot C_i$ est semblable à une partie de chaque ensemble $P_y^{x_0} \cdot C_j$, $i \neq j$. Tous les ensembles H_i sont des ensembles C de classe α; deux ensembles H_i et H_j ($i \neq j$ n'ont aucun point commun et la somme $H_1 + H_2 + \ldots + H_n + \ldots$ coïncide avec le segment $(0, 1)$. Donc, les ensembles H_i et par suite leurs complèmentaires $H_i' = CH_i$ appartiennent au corps maximum de classe α. On a évidemment $E_i \subset H_i'$ et $H_1' \cdot H_2' \cdot \ldots \cdot H_n' \cdot \ldots = 0$.

THÉORÈME IV. *Si l'on supprime à une infinité dénombrable d'ensembles C de classe α leur partie commune, les parties restantes sont séparables multiplement au moyen d'ensembles complémentaires aux ensembles C de classe α.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème III.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

Л. В. КЕЛДЫШ

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КЛАССОВ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОНСТИТУАНТ АНАЛИТИЧЕСКОГО ДОПОЛНЕНИЯ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе доказано четвертое неравенство Серпинского для действительных конституант. Из него получены оценки сверху классов этих конституант.

Введение

Известно, что всякое аналитическое дополнение разлагается в трансфинитную последовательность конституант измеримых B:

$$\mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_1 + \cdots + \mathscr{E}_\omega + \cdots + \mathscr{E}_\beta + \cdots /\Omega.$$

В своем мемуаре ([1]) Н. Н. Лузин рассматривал новое разложение дополнения на конституанты. Используя неравенства Серпинского, он нашел верхние границы классов этих новых конституант и показал, что эти границы достигаются. Для приложения к некоторым вопросам теории измеримых B-множеств необходимо рассмотреть верхние границы классов конституант, определяемых прямолинейным решетом. Решение этой проблемы является задачей настоящей работы. Мы будем рассматривать множества, лежащие в пространстве Бэра * J_x.

Плоским прямолинейным решетом C называется бесконечное множество порций, лежащих на прямых с рациональными ординатами, параллельных оси OX. Каждая порция π_n решета C называется его элементом. Множество E, определенное с помощью решета C, есть множество всех точек x_0 пространства J_x таких, что прямая P_{x_0} $(x = x_0)$ пересекает решето C по множеству C_{x_0}, которое не вполне упорядочено в положительном направлении оси OX. Если x_0 — точка дополнительного множества CE,

* J_x — множество всех иррациональных точек оси OX. Порцией называется множество всех точек пространства J_x, расположенных между двумя рациональными точками (терминология Н. Н. Лузина).

то множество C_{x_0} вполне упорядочено в указанном направлении. **Действительным индексом** $\operatorname{Ind} C$ решета C в точке x_0 называется соответствующее конечное или трансфинитное число. Действительной конституантой $\mathscr{E}_\alpha$ называется множество точек x_0, для которых *

$$\operatorname{Ind} C = \alpha.$$

В цитированной статье Н. Н. Лузин вводит понятие прямоугольного решета. Прямоугольным решетом называется совокупность счетного множества прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат и расположены таким образом, что если даны два прямоугольника $\triangle$ и $\triangle'$, то возможны два случая: один из этих прямоугольников содержится в другом, или эти прямоугольники не имеют ни одной общей **внутренней** точки. Если Г — прямоугольное решето, то мы будем различать прямоугольники по рангам. По определению прямоугольником первого ранга называется прямоугольник $\triangle$, который не содержится ни в одном другом прямоугольнике решета Г; прямоугольник $\triangle$ решета Г называется прямоугольником ранга n, если он содержится в прямоугольнике $\triangle'$ ранга $n-1$ и если он не содержится ни в одном прямоугольнике решета, содержащемся в $\triangle'$. Мы будем обозначать через S_n совокупность всех прямоугольников решета Г ранга n и через Θ общую часть всех S_n:

$$\Theta = S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_n \cdot \ldots$$

Множество Θ есть плоское точечное множество с иррациональными абсциссами. Координата y может быть как рациональной, так и иррациональной. Ортогональная проекция Θ на область J_x есть аналитическое множество. Мы будем говорить, что это множество определено решетом Г.

Н. Н. Лузин показал (2), что всякое прямоугольное решето может быть преобразовано таким образом, что проекции на ось OY прямоугольников $\triangle_n^{(1)}$ ранга 1 образуют **возрастающую** последовательность интервалов $\sigma_n^{(1)}$; и вообще, каков бы ни был прямоугольник $\triangle_j^{(n-1)}$ ранга $(n-1)$, проекции на ось OY прямоугольников ранга n, содержащихся в $\triangle_j^{(n-1)}$, образуют возрастающую последовательность интервалов $\sigma_i^{(n)}$.

Наконец, пересчитаем множество всех рациональных точек оси OY: $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$; каково бы ни было целое положительное число n, можно всегда предположить, что точка r_n не принадлежит ни к какому интервалу $\sigma_i^{(n)}$ ранга n. Мы назовем такое решето **прямоугольным упорядоченным решетом**. Всякому прямоугольному упорядоченному решету, которое определяет

* См. (1), стр. 7.

аналитическое множество E, соответствует прямолинейное решето C, состоящее из верхних сторон всех прямоугольников решета Γ; прямолинейное решето определяет то же множество. Мы назовем решето C прямолинейным упорядоченным решетом или (по терминологии Н. Н. Лузина) элементарным решетом. Известно, что всякое A-множество может быть определено с помощью элементарного решета. Вообще, если дано прямоугольное решето Γ, мы можем легко получить прямолинейное решето C, которое определяет то же множество. Обратно, мы покажем, что при некоторых допущениях прямолинейному решету C можно поставить в соответствие прямоугольное решето, определяющее то же множество.

Пусть C — прямолинейное решето, определяющее множество E. Легко показать, что, не изменяя совокупности всех элементов решета и только разбивая некоторые из элементов на конечное число частей, можно достигнуть того, что каковы бы ни были два элемента этого решета π_i и π_j, будет иметь место один из двух случаев: или ортогональная проекция одного из этих элементов в область J_x содержится в ортогональной проекции другого, или же проекции элементов π_i и π_j не имеют ни одной общей точки.

В самом деле, перенумеруем все элементы решета

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$$

и предположим, что сумма $(n-1)$ первых элементов этой последовательности представлена в виде множества элементов $\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_m^*$, $m \geqslant n-1$ попарно без общих точек и что, таким образом, это конечное число элементов удовлетворяет нашему условию. Если система элементов $\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_m^*, \pi_n$ удовлетворяет нашему условию, то мы оставляем элемент π_n без изменения. Если нет, мы его разлагаем на конечное число порций $\pi_{m+1}^*, \pi_{m+2}^*, \ldots, \pi_{m_1}^*$ таким образом, что система $\pi_1^*, \ldots, \pi_m^*, \pi_{m+1}^*, \ldots, \pi_{m_1}^*$ удовлетворяет нашему условию. После этого очевидно, что система элементов

$$\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_m^*, \ldots,$$

совпадающая с решетом C, удовлетворяет нашему условию.

Можно, кроме того, предположить, что каково бы ни было положительное число ε, существует только конечное число элементов решета C, длины которых больше ε.

Докажем теперь, что

Если дано прямолинейное решето C, определяющее аналитическое множество E, то существует прямоугольное решето Γ, определяющее то же множество и такое, что множество верхних сторон прямоугольников этого решета совпадает с решетом C.

Предположим, что система элементов $\{\pi_n\}$ решета C удовлетворяет нашим двум условиям. Тогда, каков бы ни был элемент

π_n решета C, существует только конечное число элементов решета, которые содержат проекцию элемента π_n. Пусть π_n — произвольный элемент решета C, а π_i — ближайший элемент, лежащий под ним и содержащий его проекцию. Построим прямоугольник $\triangle_n$, у которого верхней стороной является элемент π_n, а нижняя сторона лежит внутри элемента π_i.

Если не существует элемента π_i, удовлетворяющего подобным условиям, то нижняя сторона прямоугольника $\triangle_n$ лежит на оси OX. Легко видеть, что совокупность всех прямоугольников образует прямоугольное решето. Действительно, если два прямоугольника $\triangle_i$ и $\triangle_j$ имеют общую внутреннюю точку, то верхняя сторона одного из них лежит над верхней стороной другого. Пусть, например, π_i — верхняя сторона $\triangle_i$, расположенная над π_j; на основании первого свойства решета C и метода построения прямоугольников проекция элемента π_j в область J_x содержится в проекции элемента π_i, но тогда прямоугольник $\triangle_j$ содержится в прямоугольнике $\triangle_i$.

Если два прямоугольника $\triangle_i$ и $\triangle_j$ имеют общую внутреннюю точку, то один из этих прямоугольников содержится в другом. Следовательно, совокупность всех прямоугольников $\triangle_n$ образует прямоугольное решето Г. Множество верхних сторон всех прямоугольников решета Г совпадает с прямолинейным решетом C. Заметим, что какова бы ни была точка x_0 пространства J_x, прямая P_{x_0} пересекает множество верхних сторон прямоугольников одного ранга во множестве, вполне упорядоченном в положительном направлении оси OY. Это следует из того, что под каждым прямоугольником $\triangle_i^{(n)}$ ранга n существует только конечное число прямоугольников того же ранга, содержащихся в одном и том же прямоугольнике $\triangle_j^{(n-1)}$ ранга $n-1$: это—прямоугольники ранга n, содержащиеся в $\triangle_j^{(n-1)}$, проекции которых содержат проекцию прямоугольника $\triangle_i^{(n)}$.

Покажем теперь, что решето C определяет то же самое множество E, как и решето Г. Очевидно, что множество $\mathcal{E}$, определяемое с помощью прямоугольного решета Г, содержится в E, так как всякой цепи прямоугольников $\triangle_{n_1}^{(1)} \supset \triangle_{n_2}^{(2)} \supset \ldots \supset \triangle_{n_k}^{(k)} \supset \ldots$, имеющей общую точку, соответствует падающая цепочка их верхних сторон: $\pi_{n_1}, \pi_{n_2}, \ldots, \pi_{n_k}, \ldots$

Нам остается доказать, что любая точка множества E содержится во множестве $\mathcal{E}$. Пусть x_0—точка множества E. Множество C_{x_0} точек решета C, расположенных на прямой P_{x_0}, не вполне упорядочено в положительном направлении оси OY. Следовательно, можно определить падающую цепочку точек множества C_{x_0}

$$y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$$

Каждая последующая точка этой последовательности находится под предыдущей.

Пусть y предельная точка этой последовательности. Пусть π_{n_1} самый нижний из элементов решета C, находящихся над точкой y и являющихся верхними сторонами прямоугольников первого ранга, и $\triangle_{n_1}^{(1)}$ соответствующий прямоугольник.

Мы найдем таким же образом элемент π_{n_2}, который совпадает с верхней стороной прямоугольника $\triangle_{n_2}^{(2)}$ второго ранга, содержащегося в $\triangle_{n_1}^{(1)}$, и т. д. Мы получим последовательность элементов решета C:

$$\pi_{n_1},\ \pi_{n_2},\ \ldots,\ \pi_{n_k},\ \ldots$$

Каждый элемент π_{n_k} совпадает с верхней стороной прямоугольника $\triangle_{n_k}^{(k)}$ ранга k, содержащегося при предыдущем прямоугольнике $\triangle_{n_{k-1}}^{(k-1)}$. Мы получим цепочку прямоугольников решета

$$\triangle_{n_1}^{(1)} \supset \triangle_{n_2}^{(2)} \supset \ldots \triangle_{n_k}^{(k)} \supset \ldots$$

Точка y, общая всем этим прямоугольникам, лежит на прямой P_{x_0}. Следовательно, ортогональная проекция этой точки в область J_x совпадает с x_0 и, значит, точка x_0 содержится в множестве $\mathcal{E}$. Итак множество $\mathcal{E}$, определенное с помощью прямоугольного решета Г, совпадает с множеством E, определенным с помощью прямолинейного решета C.

Ч. Т. Д.

Мы будем в дальнейшем называть решето Г соответствующим решету C и, наоборот, будем считать решето Г уже построенным.

Из нашей теоремы, очевидно, вытекает такое следствие:

Следствие. *Каково бы ни было прямолинейное решето, определяющее множество E, существует элементарное решето C', определяющее то же множество и такое, что для всякой точки x_0 множества, дополнительного к E, имеет место равенство:*

$$\mathrm{Ind}_{x_0}C' = \mathrm{Ind}_{x_0}C.$$

Действительно, пусть C произвольное прямолинейное решето, определяющее A-множество E, а Г соответствующее прямоугольное решето. Это прямоугольное решето может быть преобразовано в упорядоченное решето Г′. Решето Г′ можно упорядочить таким образом, что если какой-либо прямоугольник $\triangle_i^{(1)}$ первого ранга находится над прямоугольником $\triangle_j^{(1)}$ первого ранга того же решета, то соответствующий прямоугольник $\overline{\triangle}_i^{(1)}$ упорядоченного решета Г′ расположен над соответствующим прямоугольником $\overline{\triangle}_j^{(1)}$. Это всегда возможно, так как под каждым прямоугольником первого ранга решета Г существует не более, чем конечное число прямоугольников того же ранга. Вообще, если прямоугольник $\triangle_i^{(n)}$

ранга n решета Г лежит над прямоугольником того же ранга $\triangle_j^{(n)}$, то соответствующий прямоугольник $\overline{\triangle}_i^{(n)}$ решета Г′ расположен над соответствующим прямоугольником $\overline{\triangle}_j^{(n)}$. Пусть C' элементарное решето, которое образовано верхними сторонами прямоугольников упорядоченного решета Г′. Легко видеть, что какова бы ни была точка x_0 дополнения к E, множество C'_{x_0} подобно множеству C_{x_0}. Следовательно,

$$\mathrm{Ind}_{x_0}C' = \mathrm{Ind}_{x_0}C.$$

ч. т. д.

Отсюда следует, что каково бы ни было прямолинейное решето C, определяющее множество E, существует элементарное решето, определяющее то же множество и такое, что действительные конституанты $\mathcal{E}_\alpha$, определенные с помощью прямолинейного решета C, таковы же, как действительные конституанты, определенные с помощью элементарного решета C'. Следовательно, для изучения действительных конституант множества $\mathcal{E}$ достаточно изучить конституанты, определенные с помощью элементарного решета.

Мы рассмотрим в дальнейшем последовательность множеств, лежащих в пространстве J_x, т. е. в множестве иррациональных точек оси OX. Рассмотрим теперь классы Бэра и Валле-Пуссена

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_n,\ \ldots,\ K_\alpha,\ \ldots,\ /\Omega.$$

Начальным классом K_0 этой классификации является совокупность всех множеств, которые являются суммами счетного числа порций так же, как и их дополнения. Основной операцией, которой пользуются при последовательном построении классов, является операция перехода к пределу. Известно, что всякий класс K_α этой классификации содержит множества трех родов:

1) прежде всего множества, называемые достижимыми снизу множествами класса α; это — множества, которые являются суммами счетного числа множеств предыдущих классов; мы обозначаем их, следуя Лузину, $\mathrm{Inf}\alpha$;

2) затем множества, называемые элементами класса α; это—множества, которые являются общей частью счетного числа множеств более низких классов; мы их обозначим $\mathrm{él}\alpha$;

3) наконец, оставшиеся множества класса α, называемые недостижимыми; мы обозначаем их $\mathrm{Inac}\alpha$.

Если α число второго рода, то класс K_α содержит множества, достижимые с двух сторон; это—множества, которые являются в одно и то же время и суммами и произведениями множеств низших классов. Они называются множествами базы B_α.

Всякое множество $\mathrm{Inac}\alpha$ является суммой счетного числа элементов класса $\leqslant \alpha$ без общих точек.

Если E является либо множеством класса $<\alpha$, либо Infα, мы будем писать $E \leqslant \text{Inf}\alpha$; таким же образом, если E — множества класса $<\alpha$ или élα, мы будем писать* $E \leqslant \text{él}\alpha$; наконец, если известно только, что множество E принадлежит классу α, мы будем писать $E \leqslant \text{Inac}\alpha$.

Доказательство четвертого неравенства Серпинского для действительных конституант

В упомянутом выше мемуаре Н. Н. Лузин использует для определения классов «кажущихся» конституант** четыре неравенства Серпинского. Последнее из этих неравенств выражает связь между числом α и классом суммы «кажущихся» конституант индексов, меньших α.

Для определения верхних границ действительных конституант нам нужны будут аналогичные неравенства, которые выражают связь между числом α и классом суммы действительных конституант с индексами, меньшими, чем α.

Пусть E произвольное A-множество и $\mathcal{E}$ его дополнение. Пусть

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots /\Omega$$

разложение множества $\mathcal{E}$ на конституанты, определенные с помощью решета C. Следуя Н. Н. Лузину, мы обозначим через σ_α сумму всех действительных конституант, номера которых меньше α:

$$\sigma_\alpha = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\beta + \ldots /\alpha.$$

Очевидно, $\sigma_1 = \mathcal{E}_0$ и σ_0 — пустое множество; в зависимости от случая четвертое неравенство может быть записано следующими формулами:

a $\qquad \sigma_{\omega^\alpha} \leqslant \text{Inf}\, 2\alpha;$

b $\qquad \sigma_{\omega^\alpha+\beta} \leqslant \text{él}\,(2\alpha+1), \ \ \beta < \omega^\alpha;$

c $\qquad \sigma_{\omega^\alpha n+\beta} \leqslant \text{Inac}\,(2\alpha+1), \ \ n > 1, \ \ \beta < \omega^\alpha.$

Заметим, что $\sigma_1 = \mathcal{E}_0$ является замкнутым множеством; следовательно, $\sigma_1 \leqslant \text{él}\,1$. Таким же образом*** $\sigma_n \leqslant \text{él}\,1$, где n произ-

* Н. Н. Лузин обозначает через $\leqslant \text{él}\alpha$ множество, которое является либо множеством класса $<\alpha$, либо élα, либо Infα. Но нам удобнее несколько изменить эти обозначения.

** «Constituante apparente», см. лит. (1), стр. 6—7.

*** σ_n является множеством σ_1 для произвольного решета порядка $n-1$, которое получится из решета C отбрасыванием на каждой прямой P_{x_0} $n-1$ первых точек решета C, если они существуют. См. (2), стр. 189—190. Легко видеть, что производное решето порядка $n-1$ остается прямоугольным решетом.

вольное целое число; σ_ω не более, чем множество типа F_σ, $\sigma_\omega \leqslant \leqslant \mathrm{Inf}\,2$, так как $\sigma_\omega = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + \ldots$

Предположим теперь, что неравенства **a**, **b** и **c** имеют место для каждого числа $\alpha' < \alpha$; мы покажем, что в этом случае они остаются верными также для числа α.

В самом деле, неравенство $\sigma_{\omega^\alpha} \leqslant \mathrm{Inf}\,2\alpha$ является следствием неравенства $\sigma_{\omega^{\alpha'}n} \leqslant \mathrm{Inac}\,(2\alpha'+1)$, так как $\sigma_{\omega^\alpha} = \sum_{n-1}^{\infty} \sigma_{\omega^{\alpha-1}n}$, если $\alpha - 1$ существует, и $\sigma_{\omega^\alpha} = \sum_{\alpha'<\alpha} \sigma_{\omega^{\alpha'}}$, если α число второго рода.

Множество $\sigma_{\omega^\alpha+1}$ получается следующим образом. Пусть $\triangle_1^{(1)}$, $\triangle_2^{(1)}, \ldots, \triangle_n^{(1)}, \ldots$ прямоугольники первого ранга решета Γ, соответствующего C, и пусть C_n часть решета C, содержащаяся в прямоугольнике $\triangle_n^{(1)}$. Обозначим через $\sigma_{\omega^\alpha}^{(n)}$ множество всех точек x_0, для которых $\mathrm{Ind}_{x_0} C_n < \omega^\alpha$, $\sigma_{\omega^\alpha}^{(n)} \leqslant \mathrm{Inf}\,2\alpha$. Тогда

$$\sigma_{\omega^\alpha+1} = \sigma_{\omega^\alpha}^{(1)} \cdot \sigma_{\omega^\alpha}^{(2)} \ldots \sigma_{\omega^\alpha}^{(n)} \ldots,$$

так как, какова бы ни была точка x_0, имеет место неравенство *

$$\mathrm{Ind}_{x_0} C = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ind}_{x_0} C_n$$

и каково бы ни было число n, если $\mathrm{Ind}_{x_0} C_n < \omega^\alpha$, то $\mathrm{Ind}_{x_0} C \leqslant \omega^\alpha$. Следовательно, $\sigma_{\omega^\alpha+1} \leqslant \acute{\mathrm{e}}\mathrm{l}\,(2\alpha+1)$.

Нам остается доказать неравенство **b** для случая $1 < \beta < \omega^\alpha$ и неравенство **c**.

Рассмотрим прежде всего одну новую систему множеств, которые нам будут полезны в дальнейшем. Пусть Γ прямоугольное решето, соответствующее решету C, и пусть x_0 точка пространства J_x такая, что прямая P_{x_0} пересекает бесконечное множество прямоугольников первого ранга решета Γ. Мы обозначим через δ_ω множество всех этих точек.

Легко видеть, что δ_ω содержит все конституанты номера α', где α произвольное число второго рода, и что δ_ω не более, чем элемент второго класса. В самом деле, пусть π_n' проекция на ось OX прямоугольника $\triangle_n^{(1)}$ первого ранга. Очевидно, $\delta_\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \pi_n'$. Пусть $\triangle_n$ прямоугольник решета Γ любого ранга (все прямоугольники перенумерованы) и пусть δ_ω^n множество δ_ω для части решета Γ, содержащейся в $\triangle_n$. Обозначим через δ_ω' сумму всех множеств δ_ω^n; $\delta_\omega' = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_\omega^n$ (мы обозначаем через $\triangle_0$ прямоугольник, содержащий все решето Γ). Очевидно, $\delta_\omega' \leqslant \mathrm{Inf}\,3$. Предположим

* При этом нужно предположить, что прямоугольники перенумерованы так, что если один из них лежит над другим, то он имеет и больший номер.

теперь, что множество δ_{ω^α} уже определено для некоторого числа α. Мы строим множество δ'_{ω^α}, исходя из δ_{ω^α}, таким же образом, как множество δ'_ω построено, исходя из δ_ω. Далее, строим множество $\delta_{\omega^{\alpha+1}}$ следующим образом. Пусть $\delta'^{(n)}_{\omega^\alpha}$ множество δ'_{ω^α} для части решета Г, лежащей в прямоугольнике первого ранга; тогда по определению $\delta_{\omega^{\alpha+1}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \delta'^{(n)}_{\omega^\alpha}$. Пусть теперь α число второго рода и предположим, что множества $\delta_{\omega^{\alpha'}}$ определены для всех чисел $\alpha' < \alpha$. Мы обозначим через δ_{ω^α} общую часть всех множеств $\delta_{\omega^{\alpha'}}$; $\delta_{\omega^\alpha} = \prod\limits_{\alpha'<\alpha} \delta_{\omega^{\alpha'}}$.

Рассмотрим теперь некоторые свойства множеств δ_{ω^α}.

Первое свойство. *Каково бы ни было число $\beta \geqslant \alpha$, множество δ_{ω^α} содержит конституанты с номером $\gamma + \omega^\beta$, где γ любое конечное или трансфинитное число.*

Мы уже видели, что этим свойством обладает множество δ_ω. Множество δ_ω содержит все конституанты $\mathscr{E}_{\gamma+\omega^\beta}$, каковы бы ни были числа γ и β. Предположим теперь, что это свойство имеет место для некоторого трансфинитного числа α, и покажем, что оно сохраняется и для числа $\alpha + 1$. Действительно, пусть $\mathscr{E}_{\gamma+\omega^\beta}$ конституанта номера $\gamma + \omega^\beta$, $\beta \geqslant \alpha + 1$, и пусть x_0 точка этой конституанты; нужно показать, что $x_0 \subset \delta_{\omega^{\alpha+1}}$.

Мы имеем $\mathrm{Ind}_{x_0} C = \gamma + \omega^\beta$; следовательно, существует бесконечное множество прямоугольников решета Г первого ранга $\Delta^{(1)}_{n_1}, \Delta^{(1)}_{n_2}, \ldots, \Delta^{(1)}_{n_k}, \ldots$ таких, что, каково бы ни было число n_k, имеет место неравенство $\omega^\alpha \leqslant \mathrm{Ind}_{x_0} C_{n_k} < \omega^\beta$. В каждом из этих прямоугольников $\Delta^{(1)}_{n_k}$ существует по крайней мере один прямоугольник какого-то ранга n, Δ_{ν_k} такой, что $\mathrm{Ind}_{x_0} C_{\nu_k} = \omega^\alpha$ (Δ_{ν_k} может совпадать с $\Delta^{(1)}_{n_k}$). Точка x содержится в конституанте номера ω^α решета C_{ν_k}, содержащегося внутри прямоугольника Δ_{ν_k}. В силу нашего предположения точка x_0 содержится в множестве $\delta^{(\nu_k)}_{\omega^\alpha}$ (этот символ обозначает множество δ_{ω^α} для решета C_{ν_k}). Значит, точка x_0 содержится также в множестве $\delta'^{(n_k)}_{\omega^\alpha}$, так как прямоугольник Δ_{ν_k} содержится в прямоугольнике $\Delta^{(1)}_{n_k}$. И это имеет место, каково бы ни было число k. Следовательно, точка x_0 содержится в верхнем предельном множестве для множеств $\delta'^{(n)}_{\omega^\alpha}$, но $\delta_{\omega^{\alpha+1}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \delta'^{(n)}_{\omega^\alpha}$ и, следовательно, точка x_0 содержится в множестве $\delta_{\omega^{\alpha+1}}$. Так как x_0 произвольная точка конституанты $\mathscr{E}_{\gamma+\omega^\beta}$, $\beta \geqslant \alpha + 1$, то

$$\mathscr{E}_{\gamma+\omega^\beta} \subset \delta_{\omega^{\alpha+1}}, \quad \beta \geqslant \alpha + 1, \ \gamma \geqslant 0.$$

Пусть теперь α число второго рода, и предположим, что наше свойство имеет место для всех чисел $\alpha' < \alpha$. Пусть β число большее или равное α, тогда, по предположению, $\mathscr{E}_{\gamma+\omega^\beta} \subset \delta_{\omega^{\alpha'}}$.

$\alpha' < \alpha$. Следовательно, $\mathcal{E}_{\gamma+\omega^\beta}$ содержится и в общей части всех множеств $\delta_{\omega^{\alpha'}}$, $\alpha' < \alpha$, но $\prod\limits_{\alpha'<\alpha} \delta_{\omega^{\alpha'}} = \delta_{\omega^\alpha}$ и, следовательно,

$$\mathcal{E}_{\gamma+\omega^\beta} \subset \delta_{\omega^\alpha}, \; \beta \geqslant \alpha, \; \gamma \geqslant 0.$$

Ч. Т. Д.

Докажем теперь второе свойство множеств δ_{ω^α}. Пусть x_0 точка множества δ_{ω^α} и π_n элемент прямолинейного решета C, содержащий точку на прямой P_{x_0}.

Второе свойство. *Если множество точек решета C, расположенное на прямой P_{x_0} ($x_0 \subset \delta_{\omega^\alpha}$) над каким-нибудь элементом решета, вполне упорядочено в положительном направлении оси OY, то тип этого множества не меньше, чем ω^α.*

Это свойство очевидно для случая $\alpha = 1$. Покажем, что если оно имеет место для некоторого числа α, то оно верно и для числа $\alpha + 1$. Действительно, пусть x_0 точка множества $\delta_{\omega^{\alpha+1}}$, а π элемент решета C, пересекающий прямую P_{x_0}.

В силу $\delta_{\omega^{\alpha+1}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \delta'^{(n)}_{\omega^\alpha}$ над элементом π существует бесконечное множество прямоугольников решета Γ первого ранга $\triangle^{(1)}_{n_1}$, $\triangle^{(1)}_{n_2}, \ldots, \triangle^{(1)}_{n_k}, \ldots$ таких, что x_0 принадлежит ко всякому множеству $\delta'^{(n_k)}_{\omega^\alpha}$ (так как может существовать не более конечного числа прямоугольников первого ранга, лежащих под элементом π).

Предположим теперь, что множество $C^{(\pi)}_{x_0}$ точек решета C, расположенных на прямой P_{x_0} над π, вполне упорядочено в положительном направлении оси OY; тогда множество C_{n_k, x_0} точек решета C_{n_k}, расположенных на прямой P_{x_0}, также упорядочено в том же направлении. Но точка x_0 содержится в множестве $\delta'^{(n_k)}_{\omega^\alpha}$ и $\delta'^{(n_k)}_{\omega^\alpha} = \sum\limits_{\triangle_i \subset \triangle^{(1)}_{n_k}} \delta^{(i)}_{\omega^\alpha}$; значит, в силу нашего предположения, тип всякого множества C_{n_k, x_0} не меньше, чем ω^α. И так как над элементом π существует бесконечно много прямоугольников $\triangle^{(1)}_{n_k}$, то тип множества $C^{(\pi)}_{x_0}$ не меньше, чем $\omega^{\alpha+1}$.

Пусть теперь α число второго рода; предположим, что наше свойство имеет место для всех чисел $\alpha' < \alpha$. Пусть x_0 точка множества δ_{ω^α} и π элемент решета C, пересекающий прямую P_{x_0}. Предположим, что множество $C^{(\pi)}_{x_0}$ вполне упорядочено и что тип этого множества меньше, чем ω^α. В этом случае существует число β, меньшее α и такое, что тип множества $C^{(\pi)}_{x_0}$ меньше, чем ω^β. Но это невозможно, так как $\delta_{\omega^\alpha} = \prod\limits_{\alpha'<\alpha} \delta_{\omega^{\alpha'}}$, и, значит, x_0 содержится в множестве δ_{ω^β} и тип множества $C^{(\pi)}_{x_0}$ не меньше, чем ω^β. Мы пришли к противоречию, и, следовательно, тип множества $C^{(\pi)}_{x_0}$ не меньше, чем ω^α.

Ч. Т. Д.

Мы покажем теперь, что классы множеств δ_{ω^α} и δ'_{ω^α} удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\delta_{\omega^\alpha} \leqslant \text{él}\, 2\alpha, \quad \delta'_{\omega^\alpha} \leqslant \text{Inf}(2\alpha+1).$$

Заметим, что второе из этих неравенств является следствием первого. Мы видели, что $\delta_\omega \leqslant \text{él}\, 2$ и $\delta'_\omega \leqslant \text{Inf}\, 3$; следовательно, неравенства имеют место для случая $\alpha = 1$. Предположим теперь, что они имеют место для числа α, и покажем, что они сохраняются для числа $\alpha+1$. Действительно, по определению $\delta_{\omega^{\alpha+1}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \delta'^{n}_{\omega^\alpha}$ и вследствие $\delta'^{n}_{\omega^\alpha} \leqslant \text{Inf}\,(2\alpha+1)$ мы получим $\delta_{\omega^{\alpha+1}} \leqslant \text{él}\; 2\alpha+2 = \text{él}\, 2\,(\alpha+1)$.

Пусть теперь α число второго рода и пусть $\delta_{\omega^{\alpha'}} \leqslant \text{él}\, 2\alpha'$ для всех чисел $\alpha' < \alpha$; $\delta_{\omega^\alpha} = \prod\limits_{\alpha'<\alpha} \delta_{\omega^{\alpha'}}$ и, следовательно, $\delta_{\omega^\alpha} \leqslant \text{él}\, 2\alpha$.

Ч. Т. Д.

Вернемся к доказательству неравенства **b** для случая $\beta > 1$. Заметим предварительно, что из неравенства $\sigma_{\omega^\alpha+1} \leqslant \text{él}\,(2\alpha+1)$ следует, что

$$\mathscr{E}_{\omega^\alpha} \leqslant \text{él}\,(2\alpha+1),$$

так как $\mathscr{E}_{\omega^\alpha} = \sigma_{\omega^\alpha+1} - \sigma_{\omega^\alpha}$.

Для определения верхней границы класса множества σ_β, после того как она известна для множества σ_α, $\alpha < \beta$, достаточно определить верхнюю границу классов множеств $\sigma_\beta - \sigma_\alpha$. Возможны два случая:

ПЕРВЫЙ СЛУЧАЙ: α — число первого рода.

В этом случае число $\omega^\alpha + \beta'$, $\beta' < \omega^\alpha$ может быть представлено в виде $\omega^\alpha + \omega^{\alpha-1}n + \beta$, где n целое число или нуль, $1 < \beta \leqslant \omega^{\alpha-1}+1$. Легко видеть, что это множество может быть представлено в виде суммы конечного числа множеств следующим образом:

$$\sigma_{\omega^\alpha+\beta'} = \sigma_{\omega^\alpha+1} + \sum_{k=0}^{n-1} [\sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}(k+1)+1} - \sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+1}] + \\ + [\sigma_{\omega^\alpha+\beta'} - \sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}n+1}]. \quad (1)$$

Каждое слагаемое этой суммы, за исключением первого, имеет вид:

$$\sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+1}, \quad 1 < \beta \leqslant \omega^{\alpha-1}+1.$$

Нам достаточно, следовательно, рассмотреть множество такого вида. Пусть k фиксированное целое число и пусть x_0 точка множества $\sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+1}$. Из неравенства

$$\omega^\alpha + \omega^{\alpha-1}k + 1 \leqslant \text{Ind}_{x_0} C < \omega^\alpha + \omega^{\alpha-1}k + \beta$$

следует, что существует $k+1$ элементов решета C, π_{n_0}, π_{n_1}, π_{n_2}, ..., π_{n_k} таких, что в этой последовательности каждый последующий элемент расположен над предыдущим, и что действительный индекс в точке x_0 части решета C, расположенной под π_{n_0}, равен в точности ω^α; действительный индекс в точке x_0 части решета C, расположенной между двумя последовательными элементами π_{n_i} и $\pi_{n_{i+1}}$, в точности равен $\omega^{\alpha-1}$, а действительный индекс в точке x_0 части решета C, расположенной над элементом π_{n_k}, включая самый элемент, меньше β.

Обозначим теперь через $\mathscr{E}^{n_0}_{\omega^\alpha}$ конституанту номера ω^α части решета C, расположенной под π_{n_0}; через $\mathscr{E}^{n_i, n_{i+1}}_{\omega^{\alpha-1}}$, $0 \leqslant i < k$ конституанту индекса $\omega^{\alpha-1}$ части решета C, расположенной между элементами π_{n_i} и $\pi_{n_{i+1}}$, и через $\bar{\sigma}^{n_k}_\beta$ множество σ_β для части решета C, расположенной над элементами π_{n_k}, включая этот элемент*.

Очевидно, что точка x_0 содержится в общей части всех множеств $\mathscr{E}^{n_0}_{\omega^\alpha}$, $\mathscr{E}^{n_0, n_1}_{\omega^{\alpha-1}}$, ..., $\mathscr{E}^{n_{k-1}, n_k}_{\omega^{\alpha-1}}$, $\bar{\sigma}^{n_k}_\beta$. Обратно, какова бы ни была группа $k+1$ целых чисел n_0, n_1, ..., n_k таких, что элементы π_{n_0}, π_{n_1}, ..., π_{n_k} образуют восходящую последовательность, для всякой точки x_0, входящей в пересечение указанных множеств, имеет место неравенство $\omega^\alpha + \omega^{\alpha-1}k + 1 \leqslant \mathrm{Ind}_{x_0} C < \omega^\alpha + \omega^{\alpha-1}k + \beta$.

Пересчитаем всевозможные группы элементов решета C по $k+1$ элементов, образующие восходящие последовательности. Пусть m номер группы $\pi_{n_0}, \pi_{n_1}, \ldots, \pi_{n_k}$; обозначим общую часть множеств $\mathscr{E}^{n_0}_{\omega^\alpha}$, $\mathscr{E}^{n_0, n_1}_{\omega^{\alpha-1}}$, ..., $\mathscr{E}^{n_{k-1}, n_k}_{\omega^{\alpha-1}}$, $\bar{\sigma}^{n_k}_\beta$ через E_m и рассмотрим сумму всех множеств E_m. Легко видеть, что

$$\sigma_{\omega^\alpha + \omega^{\alpha-1}k+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha + \omega^{\alpha-1}k+1} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Мы имеем:

$$\mathscr{E}^{n_0}_{\omega^\alpha} \leqslant \text{él}\,(2\alpha+1),\ \mathscr{E}^{n_i, n_{i+1}}_{\omega^{\alpha-1}} \leqslant \text{él}\,(2\alpha-1),\ \bar{\sigma}^{n_k}_\beta \leqslant \text{él}\,(2\alpha-1); \qquad (2)$$

следовательно,

$$E_m \leqslant \text{él}\,(2\alpha+1).$$

Легко видеть, что два множества E_i и E_j не имеют общей точки. В самом деле, предположим, что точка x_0 принадлежит одновременно двум множествам E_i и E_j, $i \neq j$. Пусть π_{n_0}, π_{n_1}, ..., π_{n_k} группа номера i, а $\pi_{n'_0}$ $\pi_{n'_1}$ .., $\pi_{n'_k}$ группа номера j. Элемент $\pi_{n'_0}$ должен быть тождественен с элементом π_{n_0}, так как если действительный индекс в точке x_0 части решета C, расположенной под π_{n_0}, равен ω^α, то индекс в той же точке части решета C,

* Множество $\bar{\sigma}^{n_k}_\beta$ целиком лежит в отрезке, в который проектируется элемент π_{n_k}.

расположенной под другим элементом, не может быть равным ω^{α}. Если группы элементов $\pi_{n_0}, \ldots, \pi_{n_k}$ и $\pi_{n'_0}, \ldots, \pi_{n'_k}$ не тождественны, то существует элемент одной группы, расположенный между двумя последовательными элементами другой. Пусть, например, $\pi_{n'_e}$ элемент второй группы, расположенный между элементами π_{n_s} и $\pi_{n_{s+1}}$ первой. Индекс в точке x_0 части решета C, расположенной между элементами π_{n_s} и $\pi_{n_{s+1}}$, равен $\omega^{\alpha-1}$; тогда индекс в точке x_0 части решета C, расположенной между элементами π_{n_s} и $\pi_{n'_e}$, должен быть меньше, чем $\omega^{\alpha-1}$, что невозможно, так как этот индекс должен быть по крайней мере равен $\omega^{\alpha-1}$ (в силу того что число $\omega^{\alpha-1}$ не может быть представлено как сумма двух чисел, меньших, чем $\omega^{\alpha-1}$).

Итак, группа номера i совпадает с группой номера j, т. е. $E_i \equiv E_j$, если у них существует хоть одна общая точка. Следовательно, для случая $i \neq j$ множества E_i и E_j не имеют общих точек.

Мы покажем теперь, что *всякое множество E_m отделимо от суммы всех остальных $\sum\limits_{j \neq m} E_j$ посредством множества e_m, класс которого не больше, чем* $2\alpha - 1$.

Пусть, например, $\pi_{n_0}, \pi_{n_1}, \ldots, \pi_{n_k}$ группа элементов решета C, с помощью которого построено множество E_m. Рассмотрим прямоугольник $\triangle_{n_0}$ прямоугольного решета Γ, верхняя сторона которого совпадает с π_{n_0}. Легко видеть, что если точка x_0 содержится в $\mathcal{E}^{n_0}_{\omega^\alpha}$, то она содержится и в $\mathcal{E}^{*n_0}_{\omega^\alpha}$, где через $\mathcal{E}^{*n_0}_{\omega^\alpha}$ обозначена действительная конституанта прямолинейного решета C_{n_0}.

Рассмотрим теперь множество $\delta^{n_0}_{\omega^{\alpha-1}}$, т. е. множество $\delta_{\omega^{\alpha-1}}$ для решета C_{n_0}; из предыдущего и из первого свойства множеств $\delta_{\omega^{\alpha-1}}$ следует, что множество $\delta^{n_0}_{\omega^{\alpha-1}}$ содержит множество $\mathcal{E}^{n_0}_{\omega^\alpha}$. Следовательно, общая часть множеств $\delta^{n_0}_{\omega^{\alpha-1}}, \mathcal{E}^{n_0 n_1}_{\omega^{\alpha-1}}, \ldots, \mathcal{E}^{n_{k-1} n_k}_{\omega^{\alpha-1}}, \bar{\sigma}^{n_k}_{\beta}$ содержит множество E_m. Обозначим эту общую часть через e_m, $E_m \subset e_m$. В силу неравенства $\delta^{n_0}_{\omega^{\alpha-1}} \leqslant \text{él}\, 2(\alpha-1)$ и неравенств (2) имеем:

$$e_m \leqslant \text{él}\,(2\alpha - 1).$$

Покажем, что д в а м н о ж е с т в а e_i и e_j н е и м е ю т о б щ е й т о ч к и. Заметим предварительно, что действительный индекс в точке x_0 части решета C, расположенной над π_{n_0}, больше, чем $\omega^{\alpha-1} k$, и меньше, чем $\omega^{\alpha-1} k + \beta$. Предположим, что точка x_0 принадлежит двум множествам: e_i и e_j. Пусть $(\pi_{n_0}, \ldots, \pi_{n_k})$ и $(\pi_{n'_0}, \ldots, \pi_{n'_k})$ две группы элементов, с помощью которых эти множества построены. Покажем, что элементы π_{n_0} и $\pi_{n'_0}$ должны быть тождественны. Действительно, предположим, что $\pi_{n'_0}$ лежит под π_{n_0}. Множество, расположенное на прямой P_{x_0} н а д $\pi_{n'_0}$, вполне упорядочено, и в силу второго свойства множеств δ_{ω^α} действительный индекс в точке x_0 части решета C, расположенной между элемен-

тами $\pi_{n_0'}$ и π_{n_0}, не меньше, чем $\omega^{\alpha-1}$ (так как $x_0 \subset \delta^{n_0}_{\omega^{\alpha-1}}$). И так как индекс в точке x_0 части решета C, расположенной над π_{n_0}, больше, чем $\omega^{\alpha-1}k$, то индекс в точке x_0 части решета C, расположенной над $\pi_{n_0'}$, больше, чем $\omega^{\alpha-1}(k+1)$. Но это невозможно, так как этот индекс должен быть меньше, чем $\omega^{\alpha-1}k+\beta$; следовательно, он не больше, чем $\omega^{\alpha-1}(k+1)$, так как $\beta \leqslant \omega^{\alpha-1}+1$.

Таким образом элементы π_{n_0} и $\pi_{n_0'}$ должны быть тождественны. Отсюда следует немедленно, что группы $\pi_{n_0}, \ldots, \pi_{n_k}$ и $\pi_{n_0'}, \ldots, \pi_{n_k'}$ тождественны (см. доказательство того, что множество E_i и E_j не имеют общей точки), и, следовательно, два множества e_i и e_j не имеют общей точки.

Отсюда следует, что множество $\sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+1}$, $\beta \leqslant \omega^{\alpha-1}+1$ является суммой счетного числа элементов E_m класса не более, чем $2\alpha+1$, таких, что каждый из этих элементов отделим от суммы всех остальных множеством класса не более, чем $2\alpha-1$. Значит множество $\sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+1}$ само является не более, чем элементом класса $2\alpha+1$.

Вследствие равенства (1) множество $\sigma_{\omega^\alpha+\beta'}$, $\beta' < \omega^\alpha$ является суммой конечного числа элементов класса не выше, чем $2\alpha+1$, и, следовательно, само оно не более, чем элемент класса $2\alpha+1$.

ВТОРОЙ СЛУЧАЙ: α — число второго рода.

В этом случае, каково бы ни было число β, меньшее, чем ω^α, существует число α' меньшее, чем α, такое, что $\beta < \omega^{\alpha'}$. Чтобы определить класс множества $\sigma_{\omega^\alpha+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha+1}$, нужно рассмотреть для каждого элемента π_n решета C множество E_n, которое является пересечением двух множеств: $\mathcal{E}^n_{\omega^\alpha}$ и $\bar{\sigma}^n_\beta$ (эти два множества определяются таким же образом, как и для первого случая).

Легко показать, что множество $\sigma_{\omega^\alpha+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha+1}$ является суммой всех множеств E_n и что каждое множество E_n содержится в множестве e_n класса не более, чем $2\alpha_n$. Множество e_n есть общая часть двух множеств $\delta^n_{\omega^{\alpha_n}}$ и $\bar{\sigma}^n_\beta$. Можно, наконец, показать, что множества e_n попарно не имеют общих точек. Отсюда легко заключить, как и в первом случае, что множество $\sigma_{\omega^\alpha+\beta} - \sigma_{\omega^{\alpha}+1}$, а вместе с ним и множество $\sigma_{\omega^\alpha+\beta}$ есть элемент класса не выше, чем $2\alpha+1$. Доказательства такие же, как и в первом случае.

Перейдем теперь к доказательству неравенства с:

$$\sigma_{\omega^\alpha n+\beta} \leqslant \mathrm{Inac}\,(2\alpha+1), \quad \beta \leqslant \omega^\alpha, \quad n > 1.$$

Множество $\sigma_{\omega^\alpha n+\beta}$ может быть представлено в виде суммы конечного числа слагаемых следующим образом:

$$\sigma_{\omega^\alpha n+\beta} = \sigma_{\omega^\alpha+1} + \sum_{k=1}^{n-1} [\sigma_{\omega^\alpha(k+1)+1} - \sigma_{\omega^\alpha k+1}] + \\ + [\sigma_{\omega^\alpha n+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha n+1}].$$

Каждый элемент этой суммы, кроме первого, имеет вид $\sigma_{\omega^\alpha k+\beta}$ — $\sigma_{\omega^\alpha k+1}$, $\beta \leqslant \omega^\alpha + 1$; следовательно, нам достаточно изучить класс этих последних множеств. Пусть x_0 точка множества $\sigma_{\omega^\alpha k+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha k+1}$. Из неравенства

$$\omega^\alpha k + 1 \leqslant \mathrm{Ind}_{x_0} C < \omega^\alpha k + \beta; \quad \beta \leqslant \omega^\alpha + 1$$

следует, что существует k элементов решета C $\pi_{n_1}, \pi_{n_2}, \ldots, \pi_{n_k}$, образующих возрастающую последовательность и таких, что индекс в точке x_0 части решета C, расположенной под π_{n_1} или между двумя последовательными элементами π_{n_i} и π_{n_j}, в точности равен ω^α, а индекс в точке x_0 части решета C, расположенной над π_{n_k}, включая этот элемент, меньше, чем β. Пусть m номер группы $\pi_{n_1}, \pi_{n_2}, \ldots, \pi_{n_k}$; точка x_0 содержится в множестве E_m, которое является общей частью множеств $\mathscr{E}^{n_1}_{\omega^\alpha}, \mathscr{E}^{n_1, n_2}_{\omega^\alpha} \ldots, \mathscr{E}^{n_{k-1}, n_k}_{\omega^\alpha}, \bar{\sigma}^{n_k}_\beta$ (обозначения те же, как при доказательстве неравенства $\mathfrak{b}$).

Легко видеть, что множество $\sigma_{\omega^\alpha k+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha k+1}$ является суммой всех множеств E_m. Имеют место неравенства:

$$\mathscr{E}^{n_1}_{\omega^\alpha} \leqslant \text{él}\,(2\alpha+1), \quad \mathscr{E}^{n_i, n_{i+1}}_{\omega^\alpha} \leqslant \text{él}\,(2\alpha+1), \quad \bar{\sigma}^{n_k}_\beta \leqslant \text{él}\,(2\alpha+1)$$

и, следовательно,

$$E_m \leqslant \text{él}\,(2\alpha+1).$$

Множество $\sigma_{\omega^\alpha k+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha k+1}$ является, следовательно, суммой счетного числа элементов класса не выше, чем $2\alpha+1$. Можно показать таким же образом, как для случая неравенства $\mathfrak{b}$, что множества E_m попарно не имеют общих точек.

Мы покажем, что **каждый из этих элементов отделим от всех остальных с помощью множества класса не выше, чем** 2α. Действительно, пусть $\pi_{n_1}, \ldots, \pi_{n_k}$ — группа элементов, с помощью которой построено множество E_m. Рассмотрим прямоугольники $\Delta_{n_1}, \ldots, \Delta_{n_k}$ прямоугольного решета Γ, которые соответствуют элементам $\pi_{n_1}, \ldots, \pi_{n_k}$. Легко видеть, что если действительный индекс в точке x_0 части решета C, расположенной между элементами π_{n_i} и $\pi_{n_{i+1}}$, равен ω^α, то действительный индекс в точке x_0 решета $C_{n_{i+1}}$, расположенного внутри прямоугольника $\Delta_{n_{i+1}}$, имеет вид $\gamma + \omega^\alpha$, $\gamma \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь множества $\delta^{n_1}_{\omega^\alpha}, \ldots, \delta^{n_k}_{\omega^\alpha}, \delta_{\omega^\alpha}$. Вследствие предыдущего замечания и вследствие первого свойства множеств δ_{ω^α} каждое множество $\delta^{n_i}_{\omega^\alpha}$ содержит соответствующее множество $\mathscr{E}^{n_i n_{i+1}}_{\omega^\alpha}$:

$$\mathscr{E}^{n_1}_{\omega^\alpha} \subset \delta^{n_1}_{\omega^\alpha}, \quad \mathscr{E}^{n_{i-1} n_i}_{\omega^\alpha} \subset \delta^{n_i}_{\omega^\alpha}, \quad \bar{\sigma}^{n_k}_\beta \subset \bar{\sigma}^{n_k}_{\omega^\alpha} + \delta_{\omega^\alpha}, \quad \beta \leqslant \omega^\alpha + 1.$$

Следовательно, общая часть множества $\delta^{n_1}_{\omega^\alpha}, \ldots, \delta^{n_{i-1} n_i}_{\omega^\alpha}$ и $\bar{\sigma}^{n_k}_{\omega^\alpha} + \delta_{\omega^\alpha}$. содержит множество E_m. Обозначим эту общую часть через e_m.

Вследствие неравенств $\delta^{n_i}_{\omega^\alpha} \leqslant \text{él}\, 2\alpha$, $\delta_{\omega^\alpha} \leqslant \text{él}\, 2\alpha$ и $\bar{\sigma}^{n_k}_{\omega^\alpha} \leqslant \text{Inf}\, 2\alpha$ мы имеем:

$$e_m \leqslant \text{Inac}\, 2\alpha.$$

Покажем теперь, что множество E_m отделено посредством множества e_m от суммы всех множеств E_i, $i \neq m$. Действительно, предположим противное. Пусть x_0 точка множества E_i, $i \neq m$, содержащаяся в e_m; рассмотрим две группы элементов решета C, с помощью которых множества e_m и E_i построены: пусть $\pi_{n_1}, \ldots, \pi_{n_k}$ группа номера m и $\pi_{n'_1}, \ldots \pi_{n'_k}$ группа номера i. Существует по крайней мере один элемент второй группы, отличный от всех элементов первой группы. Пусть, $\pi_{n'_e}$ такой элемент. Элемент $\pi_{n'_e}$ расположен непосредственно над одним из элементов первой группы π_{n_s} или над осью OX. Действительный индекс части решета C, расположенной между элементами π_{n_s} и $\pi_{n'_e}$ (или между осью OX и $\pi_{n'_e}$), больше или равен ω^α, так как $x_0 \subset \subset \mathcal{E}^{n'_{e-1} n'_e}_{\omega^\alpha}$. Действительный индекс в точке x_0 части решета C, расположенной между $\pi_{n'_e}$ и $\pi_{n_{s+1}}$, не меньше, чем ω^α, так как $x \subset \subset \delta^{n_{s+1}}_{\omega^\alpha}$; следовательно, существует по крайней мере $k+1$ элементов решета $\pi_{n_1}, \ldots, \pi_{n_s}, \pi_{n'_e}, \pi_{n_{s+1}}, \ldots, \pi_{n_k}$ таких, что действительный индекс в точке x_0 части решета C, расположенной между двумя последовательными элементами этой группы, по крайней мере равен ω^α; отсюда следует неравенство

$$\text{Ind}_{x_0} C \geqslant \omega^\alpha (k+1) + 1.$$

Но это невозможно, так как для точки x_0, содержащейся в множестве E_i, должно иметь место неравенство:

$$\text{Ind}_{x_0} C < \omega^\alpha k + \beta, \quad \beta \leqslant \omega^\alpha + 1.$$

Следовательно, множество e_m отделяет множество E_m от всех множеств E_i, $i \neq m$.

Таким образом множество $\sigma_{\omega^\alpha k+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha k+1}$ является суммой элементов класса не выше, чем $2\alpha+1$, одновременно отделенных друг от друга с помощью множеств низших классов. Но в этом случае множество $\sigma_{\omega^\alpha k+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha k+1}$ само является множеством класса не выше, чем $2\alpha+1$*. Следовательно, и множество $\sigma_{\omega^\alpha n+\beta}$ есть множество класса не выше, чем $2\alpha+1$. Это множество является суммой конечного числа изолированных множеств класса $2\alpha+1$**.

Ч. Т. Д.

---

* См. ([2]), стр. 71—72.

** Изолированным множеством называется множество, которое является суммой счетного множества элементов, каждый из которых отделим от суммы всех остальных.

Мы можем теперь указать верхние границы для классов действительных конституант дополнения к A-множеству. Мы уже видели, что $\mathcal{E}_{\omega^\alpha} \leqslant \text{él}(2\alpha+1)$. Рассмотрим теперь множество $\mathcal{E}_{\omega^\alpha+\beta'}$, $\beta < \omega^\alpha$, т. е. действительную конституанту номера $\omega^\alpha + \beta'$. Легко видеть, что $\mathcal{E}_{\omega^\alpha+\beta'} = \sigma_{\omega^\alpha+\beta'+1} - \sigma_{\omega^\alpha+\beta'}$ и на основании неравенства $\mathfrak{b}$ мы можем заключить, что $\mathcal{E}_{\omega^\alpha+\beta'}$ есть разность двух элементов класса не выше, чем $2\alpha+1$. Повторяя шаг за шагом доказательство неравенства $\mathfrak{b}$ для случая $\beta > 1$ и заменяя только множества $\bar{\sigma}_\beta^{n_k}$ через $\bar{\mathcal{E}}_\beta^{n_k}$, мы можем доказать следующее неравенство:

$$\mathcal{E}_{\omega^\alpha+\beta'} \leqslant \text{él}(2\alpha+1), \quad \beta' < \omega^\alpha.$$

Наконец, из неравенства $\mathfrak{c}$ следует, что

$$\mathcal{E}_{\omega^\alpha n+\beta} \leqslant \text{Inac}(2\alpha+1), \quad n > 1, \ 0 \leqslant \beta < \omega^\alpha,$$

так как $\mathcal{E}_{\omega^\alpha n+\beta} = \sigma_{\omega^\alpha n+\beta+1} - \sigma_{\omega^\alpha n+\beta}$. Заметим, что, повторяя доказательство неравенства $\mathfrak{c}$ и заменяя только $\bar{\sigma}_\beta^{n_k}$ через $\bar{\mathcal{E}}_\beta^{n_k}$, мы можем показать, что $\mathcal{E}_{\omega^\alpha k+\beta}$ есть изолированное множество класса не выше $2\alpha+1$. Следовательно, это множество класса $2\alpha+1$ и подкласса не выше ω.

Резюмируя, мы имеем для классов действительных конституант дополнений к A-множеству следующие неравенства:

$$\mathcal{E}_{\omega^\alpha+\beta} \leqslant \text{él}(2\alpha+1), \quad 0 \leqslant \beta < \omega^\alpha, \qquad \mathcal{E}_{\omega^\alpha n+\beta} \leqslant \text{Isol}(2\alpha+1), \quad n > 1, \quad 0 \leqslant \beta < \omega^\alpha,$$

где $\text{Isol}\,\alpha$ обозначает изолированное множество класса α, и где мы пишем $E \leqslant \text{Isol}\,\alpha$, если E либо множество класса $<\alpha$, либо $\text{Inf}\alpha$, либо $\text{él}\alpha$, либо изолированное множество класса α.

Математич. институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
25. I. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lusin N. N., Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, 1933.

[2] Lusin N. N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930.

L. KELDYCH. SUR LES BORNES SUPÉRIEURES DES CLASSES DES CONSTITUANTES RÉELES D'UN COMPLÉMENTAIRE ANALYTIQUE

RÉSUMÉ

Le but de cet article est la détermination des bornes supérieures des classes des constituantes d'un complémentaire analytique défini au moyen d'un crible rectiligne. Nous donnons à ces constituantes le nom de «constituantes réelles» pour les distinguer des «constituantes apparantes» qui ont été examinées par N. Lusin *.

Nous supposons que les ensembles analytiques considérés sont situés dans le domaine fondamental.

Nous démontrons d'abord *qu'étant donné un crible rectiligne quelconque C, qui définit un ensemble analytique E, on peut construire un crible rectangulaire* ** Γ *définissant le même ensemble et tel, que l'ensemble des faces supérieures des rectangles de ce crible coïncide avec le crible C.*

Nous considérons la classification de Baire de la Vallée-Poussin et, en suivant Lusin, nous désignons par élα les éléments de classe α, par Infα les ensembles de classe α accessibles inférieurement.

E étant un ensemble de classe inférieure à α ou bien un Infα (élα), nous écrirons $E \leqslant \mathrm{Inf}\alpha$ ($E \leqslant \text{él}\alpha$).

Enfin, si la classe de E est au plus égale à α nous écrirons $E \leqslant \mathrm{Inac}\,\alpha$.

Pour déterminer les classes des constituantes apparantes Lusin utilise quatre inégalités dues à Sierpinski ***.

Pour déterminer les bornes supérieures des classes des constituantes réelles nous aurons besoin d'une inégalité analogue à la quatrième de ces inégalités.

Nous désignons par σ_α la somme des constituantes réelles dont les indices sont inférieurs à α:

$$\sigma_\alpha = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \cdots + \mathcal{E}_\beta + \cdots / \alpha.$$

Alors, suivant les cas, la quatrième inégalité peut être écrite dans l'une des formes suivantes:

$$\text{a) } \sigma_{\omega^\alpha} \leqslant \mathrm{Inf}\, 2\alpha; \quad \text{b) } \sigma_{\omega^\alpha + \beta} \leqslant \text{él}\,(2\alpha + 1); \quad \beta < \omega^\alpha;$$
$$\text{c) } \sigma_{\omega^\alpha n + \beta} \leqslant \mathrm{Inac}\,(2\alpha + 1); \; n > 1, \; \beta < \omega^\alpha.$$

Il est aisé de voir que l'on a $\sigma_n \leqslant \text{él}\,1$, n étant un entier positif et par suite $\sigma_\omega \leqslant \mathrm{Inf}\,2$. Nous supposons que les inégalités a), b) et c) ont lieu pour chaque nombre $\alpha' < \alpha$, et nous démontrons qu'elles restent encore vraies pour le nombre α lui même. L'inégalité a) est une conséquence de l'inégalité $\sigma_{\omega^{\alpha'} n} < \mathrm{Inac}\;(2\alpha +$

* Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, 1933.
** Crible formé des rectangles.
*** Lusin, loc. c., p. 6—7.

$+1$), $\alpha' < \alpha$. Puis on obtient $\sigma_{\omega^{\alpha}+1}$ de la manière suivante: Soit $\triangle_n^{(1)}$ un rectangle de rang 1 du crible rectangulaire Γ correspondant à C. On désigne par $\sigma_{\omega^{\alpha}}^{(n)}$ l'ensemble $\sigma_{\omega^{\alpha}}$ défini au moyen de la partie du crible C contenu dans $\triangle_n^{(1)}$. Alors, on a:

$$\sigma_{\omega^{\alpha}+1} = \sigma_{\omega^{\alpha}}^{(1)} \cdot \sigma_{\omega^{\alpha}}^{(2)} \cdots \sigma_{\omega^{\alpha}}^{(n)} \cdots$$

et l'inégalité $\sigma_{\omega^{\alpha}+1} \leqslant$ él $(2\alpha + 1)$ est une conséquence de l'inégalité a).

Il suit pour la constituante $\mathcal{E}_{\omega^{\alpha}}^{\Gamma}$ d'indice α: $\mathcal{E}_{\omega^{\alpha}} \leqslant$ él $(2\alpha + 1)$.

Il nous reste à démontrer l'inégalité b) dans le cas $1 < \beta < \omega^{\alpha}$ et l'inégalité c).

Pour démontrer ces inégalités nous considérons le système des ensembles auxilières $\delta_{\omega^{\alpha}}$ et $\delta'_{\omega^{\alpha}}$. Nous désignons par δ_{ω} l'ensemble de tous les points x tels que la droite $x = x_0$ coupe une infinité de rectangles du crible Γ de rang 1; et nous désignons par δ'_{ω} la somme de tous les ensembles $\delta_{\omega}^{(n)}$, $\delta_{\omega}^{(n)}$ étant un ensemble δ_{ω} pour la partie du crible Γ située dans le rectangle $\triangle_n$ de rang quelconque. L'ensemble $\delta_{\omega^{\alpha}}$ étant défini, on construit $\delta'_{\omega^{\alpha}}$ en partant de $\delta_{\omega^{\alpha}}$ de la même manière comme on a construit δ'_{ω} en partant de δ_{ω}. Soit maintenant $\delta'^{n}_{\omega^{\alpha}}$ l'ensemble $\delta'_{\omega^{\alpha}}$ pour la partie du crible Γ située dans le rectangle $\triangle_n^{(1)}$ de rang 1. Alors par définition $\delta_{\omega^{\alpha+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \delta_{\omega^{\alpha}}^{1(n)}$. Si α est un nombre de seconde espèce nous avons

$$\delta_{\omega^{\alpha}} = \prod_{\alpha' < \alpha} \delta_{\omega^{\alpha'}}.$$

Nous démontrons sans difficulté les inégalités

$$\delta_{\omega^{\alpha}} \leqslant \text{él}\, 2\alpha, \quad \delta'_{\omega^{\alpha}} \leqslant \text{Inf}\, (2\alpha + 1)$$

et deux propriétés des ensembles $\delta_{\omega^{\alpha}}$:

1. Quel que soit le nombre $\beta \geqslant \alpha$ l'ensemble $\delta_{\omega^{\alpha}}$ contient la constituante d'indice $\gamma + \omega^{\beta}$, γ étant un nombre fini ou transfini quelconque:

$$\delta_{\omega^{\alpha}} \supset \mathcal{E}_{\gamma+\omega^{\beta}}, \ \beta \geqslant \alpha, \ \ \gamma > 0.$$

2. Si le point x_0 appartient à $\delta_{\omega^{\alpha}}$ et l'ensemble des points du crible C situés sur la droite $x = x_0$ au dessus d'un point quelconque est bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OY, le type de cet ensemble est au moins égal à ω^{α}.

Dans le cas où α est un nombre de première espèce il suit de l'égalité:

$$\sigma_{\omega^\alpha+\beta} = \sigma_{\omega^\alpha+1} + \sum_{k=0}^{n-1} [\sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}(k+1)+1} - \sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+1}] +$$
$$+ [\sigma_{\omega^\alpha+\beta} - \sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}n+1}]$$
$$n \geqslant 0; \quad \beta = \omega^{\alpha-1} n + \beta'$$

que pour démontrer l'inégalité b) il suffit de considérer la classe de l'ensemble $[\sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+\beta'} - \sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+1}]$, $1 < \beta' \leqslant \omega^{\alpha-1}+1$.

Nous numérotons maintenant tous les groupes de $k+1$ éléments $\pi_{n_0}, \pi_{n_1}, \ldots, \pi_{n_k}$ du crible C tels que chaque élément de ce groupe est situé au dessus de celui qui le precède. Désignons par $\mathcal{E}^{n_0}_{\omega^\alpha}$ la constituante d'indice ω^α de la partie du crible C située au dessous de π_{n_0}, par $\mathcal{E}^{n_i, n_{i+1}}_{\omega^{\alpha-1}}$, $0 \leqslant i < k$ la constituante d'indice $\omega^{\alpha-1}$ de la partie du crible C située entre les éléments π_{n_i} et $\pi_{n_{i+1}}$ et par $\bar{\sigma}^{n_k}_{\beta'}$ l'ensemble $\sigma_{\beta'}$ pour la partie du crible C située au dessus de l'élément π_{n_k}, cet élément y compris.

Nous désignons par E_m la partie commune des ensembles $\mathcal{E}^{n_0}_{\omega^\alpha}$, $\mathcal{E}^{n_0 n_1}_{\omega^{\alpha}-1}, \ldots \mathcal{E}^{n_{k-1} n_k}_{\omega^{\alpha-1}}$, $\bar{\sigma}^{n_k}_{\beta}$, m étant le numéro du groupe $\pi_{n_0}, \pi_{n_1}, \ldots, \pi_{n_k}$ et nous démontrons facilement que

$$\sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+\beta'} - \sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+1} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m.$$

On a $E_m \leqslant$ él $(2\alpha+1)$. Les deux ensembles E_i et E_j n'ont aucun point commun. Nous désignons par $\delta^{n_0}_{\omega^{\alpha-1}}$ l'ensemble $\delta_{\omega^{\alpha-1}}$ pour la partie du crible Γ située dans le rectangle $\triangle_{n_0}$ correspondant à l'élément π_{n_0}, et nous considérons l'ensemble e_m qui est la partie commune des ensembles $\delta^{n_0}_{\omega^{\alpha-1}}$, $\mathcal{E}^{n_0 n_i}_{\omega^{\alpha-1}}, \ldots, \mathcal{E}^{n_{k-1} n_k}_{\omega^{\alpha-1}}$, $\bar{\sigma}^{n_k}_{\beta}$.

On a évidemment $e_m \leqslant$ él $(\alpha - 1)$, et nous démontrons, que *l'élément E_m est séparé de la somme $\sum_{i \neq m} E_i$ au moyen de l'ensemble e_m.* Il en suit que: $\sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+\beta'} - \sigma_{\omega^\alpha+\omega^{\alpha-1}k+1} \leqslant$ él $(2\alpha+1)$.

C. Q. F. D.

La démonstration de l'inégalité b) dans le cas où α est un nombre de seconde espèce et de l'inégalité c) est analogue à celle du cas considéré.

Des trois inégalités a), b) et c) on obtient sans difficulté les bornes supérieures des classes des constituantes réelles:

$$\mathcal{E}_{\omega^\alpha+\beta} \leqslant \text{él}\,(2\alpha+1), \quad 0 \leqslant \beta < \omega^\alpha$$
$$\mathcal{E}_{\omega^\alpha n+\beta} \leqslant \text{Inac}\,(2\alpha+1), \quad n > 1,\ 0 \leqslant \beta < \omega^\alpha.$$

Dans un article qui paraîtra bientôt nous allons démontrer que ces bornes sont atteintes.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

А. А. ЛЯПУНОВ

О НЕКОТОРЫХ УНИФОРМНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ДОПОЛНЕНИЯХ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Исследовано одно семейство CA-кривых, проектирующихся в C-множества. Доказана инвариантность A_2'-множеств относительно (A)-операции.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

C-нормальные CA-кривые

Всякому плоскому аналитическому дополнению (CA-множеству), лежащему в фундаментальной области J_{xy} *, отвечает трансфинитная функция от иррационального числа x_0, являющаяся наименьшим индексом решета, определяющего это множество на прямой $x=x_0$. Эти функции неоднократно использовал П. С. Новиков. В случае, когда указанное аналитическое дополнение униформно относительно оси OY **, множество точек оси OX, где эта функция имеет некоторое фиксированное значение, есть всегда B-множество. Как показал П. С. Новиков (1), всякое C-множество есть проекция некоторого униформного аналитического дополнения. Мы покажем, что для всякого C-множества можно построить проектирующуюся в него CA-кривую (униформные множества мы будем называть кривыми и поверхностями), трансфинитная функция которой удовлетворяет некоторому специальному условию, характеризующему простоту ее поведения и сближающему ее с регулярными параметрическими изображениями B-множеств.

* Фундаментальной областью $J_{x_1x_2\ldots x_n}$ пространства $OX_1X_2\ldots X_n$ называется множество точек этого пространства, все координаты которых иррациональны. Результаты, получаемые для фундаментальной области, легко переносятся на все пространство, с незначительными изменениями формулировок. Изложение часто упрощается рассмотрением фундаментальной области.

** Мы будем говорить, что некоторое множество униформно относительно некоторого многообразия, если в каждом многообразии, параллельном данному, оно содержит не более, чем одну точку.

1. Мы будем называть $(x_1x_2...x_k)$-порцией некоторого множества E, лежащего в фундаментальной области $J_{x_1x_2...x_k...x_n}$, совокупность всех его точек, проекции которых на пространство $OX_1X_2...X_k$ принадлежат некоторой наперед фиксированной k-мерной порции этого пространства. Иногда после слов «$(x_1x_2...$ $...x_k)$-порция» мы будем указывать, о какой именно порции пространства $OX_1X_2...X_k$ идет речь. В частности, если это интервал Бэра, мы будем говорить «бэровская $(x_1x_2...x_n)$ - порция E» *. Мы будем говорить, что CA-кривая, униформная по оси OY и лежащая в фундаментальной области J_{xy}, C-нормальна, если всякая ее (y)-порция проектируется на ось OX в некоторое C-множество, и что она α-нормальна, если всякая (y)-порция ее проектируется в множество, входящее в B-тело, построенное на C-множествах класса α. Легко показать, что CA-кривые, проектирующиеся в C-множества, которые построил П. С. Новиков, C-нормальны. Мы покажем, что всякое множество, входящее в B-тело на C-множествах класса α, есть проекция α-нормальной CA-кривой.

Для удобства изложения прежде всего рассмотрим некоторые свойства C-нормальных CA-кривых и определенных ими трансфинитных функций.

2. В дальнейшем мы будем пользоваться CA-кривыми и CA-поверхностями, лежащими в трехмерной фундаментальной области. На основании следующей леммы все полученные результаты будут приложимы к CA-кривым, лежащим в плоскости.

ЛЕММА I. *Между фундаментальной областью $J_{xx_1x_2...x_n}$ и геометрическим образом некоторой непрерывной и однозначной функции $x = f(t)$, где x* и *t иррациональны, можно устроить такое гомеоморфное соответствие, что отвечающие друг другу точки всегда имеют одинаковые абсциссы.*

Доказательство. Преобразуем фундаментальную область $J_{xx_1x_2...x_n}$ с помощью кривой Пеано**

$$x = f(t),\ x_i = f_i(t),\quad i = 1, 2, \ldots, n$$

в фундаментальную область J_t.

Рассмотрим в фундаментальной области J_{tx} геометрический образ функции $x = f(t)$. Точке $(x't')$ этой кривой отвечает точка $[x' f_1(t') f_2(t') \ldots f_n(t')]$ фундаментальной области $J_{xx_1x_2...x_n}$.

Очевидно, это соответствие удовлетворяет условиям леммы.

Ч. Т. Д.

Мы будем говорить, что фундаментальная область $J_{xx_1x_2...x_n}$ развернута в кривую.

* См. ([2]), стр. 114.

** См. ([2]), стр. 115.

Замечание 1-е. Отметим, что при этом всякая бэровская $(x_1x_2...x_n)$ - порция фундаментальной области $J_{x_1x_2...x_n}$ преобразуется в счетное число бэровских (t)-порций кривой $x = f(t)$.

Замечание 2-е. Лемма справедлива для счетно-мерной фундаментальной области $J_{xx_1x_2...x_n...}$; при этом всякой бэровской $(x_1x_2...x_n)$-порции фундаментальной области $J_{x_1x_2...x_n...}$ также отвечает счетное число бэровских (t)-порций кривой $x = f(t)$. Это замечание мы используем в дальнейшем.

Замечание 3-е. Из замечания второго и известной теоремы В. К. Серпинского * о произведении проекций униформных аналитических дополнений следует, что *произведение счетного числа множеств, являющихся проекциями α-нормальных CA-кривых, есть такое же множество.*

3. Докажем следующую лемму:

ЛЕММА II. *Всякая CA-часть α-нормальной CA-кривой проектируется в дополнение к C-множеству класса* $\alpha + 1$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ есть α-нормальная CA-кривая, $\mathcal{E}'$ ее CA-часть. Фундаментальную область, содержащую $\mathcal{E}$, мы развернем в кривую $x = f(t)$. Пусть E и E' суть образы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, это также α-нормальные CA-кривые. Они униформны по каждой из осей OT и OX. Проекции множеств E и E' на ось OT—множества H и H'—суть также CA-множества, так как их дополнения суть проекции дополнений до всей кривой $x = f(t)$ множеств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$. Следовательно, существует (A)-операция, составленная из интервалов Бэра оси OT и определяющая множество CH'. Вследствие двойной униформности кривых E и E' существует (A)-операция над бэровскими (t)-порциями E, определяющая множество E', и (A)-операция над проекциями этих (t)-порций E на ось OX, определяющая разность между проекциями E и E' на эту ось. Следовательно, в силу α-нормальности кривой E проекция E' на ось OX есть дополнение к C-множеству класса $\alpha + 1$.

Ч. Т. Д.

4. На основании леммы II мы можем выяснить роль трансфинитных функций, определенных α-нормальными CA-кривыми в семействе всех трансфинитных функций, определенных CA-кривыми.

ТЕОРЕМА I. *Пусть* $\gamma(x)$ *есть трансфинитная функция, определенная α-нормальной CA-кривой* E, *а* $\beta(x) < \gamma(x)$ *есть трансфинитная функция, определенная CA-кривой* $\mathcal{E}$. *Тогда проекция* $\mathcal{E}$ *на ось OX есть C-множество класса* $\alpha + 1$.

Доказательство. На основании леммы I можно считать, что E и $\mathcal{E}$ лежат в фундаментальной области J_{xy}. Кроме того,

* См. (²), стр. 282.

можно считать, что $\mathcal{E}$ лежит в части плоскости, где $y < \frac{1}{2}$, а E — в части, где $y > \frac{1}{2}$. Множество G точек трансфинитной единственности ([1]) множества $E + \mathcal{E}$ (определенного таким решетом, что индексы его суть $\gamma(x)$ или $\beta(x)$, смотря по тому, входит ли точка в E или в $\mathcal{E}$) будет содержать множество $\mathcal{E}$. Кроме того, G есть CA-множество. $G \cdot E$ есть CA-часть множества E.

Проекция на ось OX множества $G \cdot E$ есть дополнение к C-множеству класса $\alpha + 1$. Следовательно, проекция на ось OX множества $\mathcal{E}$ есть C-множество класса α.

Ч. Т. Д.

Замечание 4-е. Развернув в кривую $x = f(t)$ фундаментальную область J_{xy}, немедленно убеждаемся в том, что кривая $\mathcal{E}$ $(\alpha + 1)$-нормальна.

Замечание 5-е. Таким же методом легко показать, что если проекция CA-кривой E есть B'_2-множество* и $\gamma(x)$ определенная этой кривой трансфинитная функция, а $\beta(x) < \gamma(x)$ трансфинитная функция, определенная некоторой CA-кривой $\mathcal{E}$, то проекция $\mathcal{E}$ на ось OX есть также B'_2-множество.

5. Для доказательства основной теоремы нам нужны будут следующие определения:

Определение I. CA-множество E, расположенное в J_{xyz}, униформное относительно оси OZ и такое, что в каждой плоскости $x = x_0$, в которой есть точки множества E, имеется точка $(x_0 y_0 z_0)$, входящая в E, причем ни одна точка $(x_0 y_1 z_1)$, где $y_1 < y_0$, не входит в E, мы назовем множеством, ограниченным снизу по OY.

Определение II. Четырехмерное решето, определяющее CA-множество, мы назовем монотонно неубывающим (не возрастающим) по OY, если выполнено следующее условие: из двух точек $(x_0 y_1 z_1)$ и $(x_0 y_2 z_2)$, принадлежащих множеству E и таких, что $y_1 < y_2$, в первой индекс решета необходимо не больше (не меньше), чем во второй. Множество E, определенное неубывающим (невозрастающим) по OY решетом, мы назовем трансфинитно неубывающим (не возрастающим) по OY.

Определение III. Множество точек $(x_0 y_0 z_0)$, удовлетворяющих условию определения I, мы назовем множеством минимальных по OY точек множества E.

ЛЕММА III. *Множество $\mathcal{E}$ минимальных по OY точек трансфинитно не убывающего по OY CA-множества E есть CA-кривая.*

* A'_2-множества суть проекции униформных аналитических дополнений. B'_2-множества суть A'_2-множества, дополнения которых также суть A'_2-множества. См. ([1]).

Доказательство. Пусть M есть множество всех точек фундаментальной области J_{xyzt}, проектирующихся в E. Это CA-множество. Пусть $\varphi(xyz)$ есть индекс не убывающего по OY решета, определяющего множество E. Построим для M пятимерное решето так, чтобы индекс его в точке $(x'y'z't')$ был равен $\varphi(x'y'z')$, если $t' \geqslant y'$, и равен $\varphi(x'y'z')+1$, если $t' < y'$.

Пусть N есть множество точек трансфинитной единственности множества M, определенного таким решетом, относительно плоскостей $(x = x_0, t = t_0)$. Это есть CA-множество. Возьмем часть этого множества, лежащую в многообразии $t = y$, и спроектируем ее в пространство $OXYZ$. Обозначим через $\mathscr{E}'$ эту проекцию. Мы покажем, что $\mathscr{E}'$ есть CA-множество и что $\mathscr{E} = \mathscr{E}'$.

Во-первых, многообразие $t = y$ униформно относительно оси OT. Следовательно, $C\mathscr{E}'$ есть проекция разности между многообразием $t = y$ и множеством N, т. е. оно является A-множеством. Следовательно, $\mathscr{E}'$ есть CA-множество.

Во-вторых, пусть точка $(x_0y_0z_0)$ есть минимальная по OY точка множества E. Тогда точка $(x_0y_0z_0t_0)$, где $t_0 = y_0$, будет точкой трансфинитной единственности множества M в плоскости $(x = x_0, t = t_0)$ и будет принадлежать многообразию $t = y$. Следовательно, точка $(x_0y_0z_0)$ входит в $\mathscr{E}'$, т. е. $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}'$. Пусть теперь точка $(x_1y_1z_1)$ входит в $\mathscr{E}'$. Это означает, что точка $(x_1y_1z_1t_1)$, где $y_1 = t_1$, входит в N, т. е. она есть точка трансфинитной единственности множества M в плоскости $(x = x_1, t = t_1)$. В силу того что множество E трансфинитно неубывающее по OY, проекция этой точки есть минимальная точка множества E, т. е. $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$; следовательно, $\mathscr{E}' = \mathscr{E}$.

Ч. Т. Д.

6. Пусть E есть некоторое множество точек фундаментальной области J_x, определенное прямолинейным* решетом C'. Очевидно, всегда можно построить новое решето C, определяющее то же множество и имеющее следующие свойства**:

1) Каждый элемент c решета C лежит на верхней стороне некоторого прямоугольника π ранга k; причем верхние стороны всех таких прямоугольников образуют некоторое элементарное решето D. Этот прямоугольник мы будем называть *прямоугольником, соответствующим элементу* c, а решето D *решетом, покрывающим решето* C.

2) Каждый из указанных прямоугольников ранга k проектируется на ось OX в некоторый интервал ранга k. Проекция двух

---

* Решето называется прямолинейным, если оно заключено в сумме счетного числа прямых $y = y_n$.

** Эти преобразования решета не новы. Мы только несколько меняем терминологию. См. ([1]).

различных прямоугольников ранга k на ось OY всегда без общих точек и образует вполне упорядоченную вверх систему отрезков.

Решето C мы также будем называть элементарным. Множество всех точек прямоугольника π, проектирующихся ортогонально на верхнюю сторону этого прямоугольника в множество c, мы назовем элементарной гребенкой решета C ранга k и обозначим ее c^*. Множество точек прямоугольника π, не входящих в c^*, мы назовем дополнительной элементарной гребенкой решета C.

Произведение по k сумм всех элементарных гребенок решета C ранга k мы назовем ядром решета C. Как известно, проекция на ось OX ядра решета C совпадает с множеством тех точек, в которых это решето не вполне упорядочено вверх.

Очевидно, если элементарное решето C состоит из множеств, входящих в B-тело на C-множествах классов $< \alpha$, то каково бы ни было рациональное число r, часть ядра решета C, лежащая в части плоскости $y < r$, проектируется на ось OX в C-множества класса α. На основании этого замечания мы можем доказать следующую лемму:

ЛЕММА IV. *Пусть C_1 и C_2 два элементарных решета, составленных из множеств, входящих в B-тело на C-множествах классов $< \alpha$. Множество E точек x_0 таких, что на прямой $x = x_0$ есть точка ядра решета C_1, лежащая ниже всех точек ядра решета C_2, всегда входит в B-тело, построенное на C-множествах класса α.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ ядра решет C_1 и C_2, через $\mathcal{E}_1^r$ и $\mathcal{E}_2^r$ части этих ядер, лежащие в части плоскости $y < r$, а через E_1^r и E_2^r проекции $\mathcal{E}_1^r$ и $\mathcal{E}_2^r$ на ось OX. Очевидно, имеем:

$$E = \sum_{r_n} E_1^{r_n} \cdot CE_2^{r_n},$$

где r_n пробегает все рациональные числа. Следовательно, E входит в B-тело на C-множества класса α.

Ч. Т. Д.

7. Теперь мы приступим к доказательству основной теоремы этой главы.

ТЕОРЕМА II. *Всякое C-множество класса α и его дополнение суть проекции α-нормальных CA-кривых.*

Доказательство мы поведем таким методом: считая, что теорема верна для всех C-множеств классов $< \alpha$ и для их дополнений, мы докажем, что она верна для дополнений к C-множествам класса α. Затем при тех же предположениях мы докажем, что теорема верна для C-множеств класса α.

Так как теорема тривиальна для CA-множеств и следует из теоремы Мазуркевича * для A-множеств, то она будет тем самым доказана для всех классов α.

Доказательство теоремы II для дополнений. Мы докажем, что, следуя методу П. С. Новикова ([1]) и сделав указанные индуктивные предположения, мы получим CA-кривую, обладающую требуемым свойством.

Пусть E есть некоторое C-множество класса α, определенное элементарным решетом C, состоящим из C множеств классов $< \alpha$. Пусть D есть решето, покрывающее решето C. По сделанному предположению, каждый элемент c решета C, так же как и его дополнение f до покрывающего его элемента d решета D, суть проекции β-нормальных CA-кривых, где $\beta < \alpha$. Пусть π есть прямоугольник, соответствующий элементу c. Обозначим через f^* множество $\pi - c^*$. Следуя П. С. Новикову, мы построим униформную по оси OZ CA-поверхность Φ, проектирующуяся в прямоугольник π, расположенную в некотором параллелепипеде Бэра пространства $OXYZ$, ранг которого равен рангу элемента d решета D, и проектирующуюся на верхнюю относительно оси OY сторону указанного параллелепипеда в сумму упомянутых выше β-нормальных CA-кривых, проектирующихся в множества c и f. Мы будем считать, что вдоль всякой параллели оси OY (разумеется, внутри выбранного параллелепипеда) индекс решета, определяющего Φ, постоянен. Исходя из этих поверхностей и следуя методу П. С. Новикова, можно построить:

1) некоторую CA-поверхность Σ, проектирующуюся в ядро решета D и трансфинитно не возрастающую по OY;

2) некоторую CA-поверхность ϑ, проектирующуюся в ядро решета C и такую, что ее индекс в точках с одинаковой проекцией на плоскость OXY не превосходит индекса поверхности Σ.

Эти поверхности можно считать униформными относительно плоскостей $z = \text{const}$.

Очевидно, эти поверхности имеют то свойство, что любые их бэровские (yz)-порции проектируются на плоскость OXY в ядра некоторых элементарных решет, состоящих из C-множеств, входящих в B-тело на C-множествах классов $< \alpha$.

Кроме того, следуя П. С. Новикову и исходя из поверхности Σ и множества Мазуркевича ядра решета D, можно построить некоторую CA-кривую Ξ, униформную относительно плоскостей $x = \text{const}$ и $z = \text{const}$ **, проектирующуюся в множество Мазуркевича ядра решета D и имеющую то свойство, что в точках с оди-

* См. лит. ([2]), стр. 284.

** Ξ есть множество минимальных по OY точек поверхности Σ.

наковой проекцией на ось OX индекс этой кривой больше всех индексов поверхности Σ. П. С. Новиков показал, что часть Ψ этой кривой, проектирующаяся в множество CE, есть CA-кривая. Мы покажем, что эта кривая α-нормальна.

Так как кривые Ξ и Ψ униформны относительно плоскостей $x = \mathrm{const}$, то результат B-операций над проекциями их частей на плоскость OXY или на ось OX совпадает с проекцией результата B-операций над теми же частями этих кривых. Поэтому, чтобы доказать α-нормальность кривой Ψ, мы можем ограничиться рассмотрением только (y)- и (z)-порций этой кривой вида $y > r$ и $z > r$, где r есть произвольное рациональное число. Для указанных (y)-порций это очевидно, так как проекции их на ось OX могут быть представлены в таком виде: проекция на ось OX (y)-порции множества Мазуркевича от ядра решета D минус множество E. Для (z)-порций мы используем лемму IV.

Достаточно доказать, что кривая Ξ α-нормальна, так как проекция (z)-порции кривой Ψ на ось OX есть разность между проекцией на эту ось (z)-порции кривой Ξ и множества E. Очевидно, проекция (z)-порции вида $z > r$ кривой Ξ на ось OX совпадает с множеством точек x_0 таких, что на прямой $x = x_0$ в плоскости OXY существует точка $(x_0 y_1) \subset G_r^+$ и ни одна из точек $(x_0 y_2)$, где $y_2 < y_1$, не входит в G_r^- (здесь через G_r^+ и G_r^- обозначены проекции на плоскость OXY (z)-порций поверхности Σ, соответствующих порциям $z > r$ и $z < r$). Так как все поверхности Φ (а также и поверхности, полученные из них методом П. С. Новикова) лежали в некоторых параллелепипедах Бэра соответствующих рангов и были $< \alpha$-нормальны*, множества G_r^+ и G_r^- будут ядрами некоторых элементарных решет, элементы которых суть множества, входящие в B-тело на C-множествах классов $< \alpha$.

Поэтому на основании леммы IV множество точек множества G_r^+, лежащих на параллелях к оси OY ниже, чем все точки множества G_r^-, имеющие ту же абсциссу, проектируется на ось OX в некоторое множество, входящее в B-тело, построенное на C-множествах класса α. Это доказывает α-нормальность кривой Ξ, а следовательно, и кривой Ψ.

Ч. Т. Д.

Доказательство теоремы II для C-множеств класса α. В этом случае CA-кривая, построенная П. С. Новиковым, уже не будет, вообще говоря, обладать требуемым свойством. Мы рассмотрим введенные в предшествующем доказательстве поверхности Φ и с помощью этих поверхностей и их частей,

* Т. е. проекция всякой (yz)-порции этих поверхностей на ось OX входит в B-тело на C-множествах классов $< \alpha$.

проектирующихся во внутренние гребенки c^*, построим трансфинитно неубывающую по OY поверхность θ', проектирующуюся в ядро решета C. Для этого нужно построить CA-поверхность Σ', проектирующуюся в ядро решета D и трансфинитно неубывающую по OY. Кроме того, с помощью частей поверхностей Φ, проектирующихся в гребенки c^*, нужно построить поверхность Θ, указанную выше. Тогда в точках с одинаковой проекцией на плоскость OXY у поверхности Σ' индекс всегда будет больше, чем у поверхности Θ. Индекс поверхности Σ' мы можем увеличить в ω раз. Затем обычным приемом мы построим поверхность Θ', проектирующуюся в ядро решета C и такую, что ее индекс равен сумме индексов поверхностей Θ и Σ' в точках с той же проекцией, причем индекс первой поверхности есть первое слагаемое. Тогда поверхность Θ' будет трансфинитно неубывающей по OY CA-поверхностью, ограниченной снизу по OY. На основании леммы III множество Λ ее минимальных по OY точек есть CA-множество. Очевидно, проекция Λ на ось OX есть множество E.

Так же, как мы доказали раньше α-нормальность кривой Ξ, мы можем с помощью леммы IV доказать α-нормальность кривой Λ, так как в этом случае проекции (z)-порций поверхности Θ' на плоскость OXY совпадают с ядрами некоторых элементарных C-решет, определяющих некоторые C-множества класса α.

Ч. Т. Д.

Таким образом наша теорема полностью доказана.

8. Нам удалось выделить некоторое семейство униформных аналитических дополнений, тесно связанных с C-множествами класса α. Однако проекция произвольной α-нормальной CA-кривой есть, вообще говоря, множество, входящее в B-тело, построенное на C-множествах класса α. Мы покажем сейчас, что всякое множество этого B-тела есть проекция некоторой α-нормальной CA-кривой. Действительно, всякое такое множество, как показал П. С. Новиков*, может быть задано посредством решета, элементы которого суть дополнения к C-множествам класса α и ядро которого униформно относительно оси OY. Мы можем указанным выше методом построить в пространстве $OXYZ$ CA-кривую, проектирующуюся в ядро этого решета, взяв за поверхности Φ α-нормальные поверхности на основании теоремы II. Очевидно, всякая (y)- или (z)-порция этой кривой проектируется на плоскость OXY в ядро некоторого решета того же типа. Таким образом мы доказали следующую теорему:

ТЕОРЕМА III. *Семейство проекций α-нормальных CA-кривых совпадает с B-телом на C-множествах класса α.*

---

* Это сделано в еще неопубликованной работе.

ГЛАВА ВТОРАЯ

Регулярность C-нормальных CA-кривых

В этой главе будет показано, что разбиение произвольного C-множества на $\aleph_1$ B-множество, доставленное проекциями конституант C-нормальных CA-кривых, всегда регулярно относительно меры и категории, т. е. полная мера этого множества содержится в проекции счетного числа указанных конституант, и на всяком совершенном множестве сумма всех этих проекций, кроме некоторого счетного семейства (конечно, зависящего от совершенного множества), необходимо первой категории. Доказательства мы изложим лишь для случая меры; случай категории может быть рассмотрен совершенно таким же образом.

9. В основе доказательства лежит следующая лемма:

ЛЕММА V. *Для множества Мазуркевича от ядра произвольного элементарного решета можно построить решето такое, что проекция конституанты номера α множества Мазуркевича, определенная этим решетом, есть внутренняя конституанта номера α множества, определенного исходным решетом. В случае, если исходное решето состояло из B-множеств или C-множеств классов $< \beta$, новое решето будет состоять из множеств того же типа.*

Доказательство. Пусть E есть некоторое множество, лежащее в фундаментальной области J_x, C элементарное решето, его определяющее и лежащее в плоскости OXY, $\mathscr{E}$ ядро решета C и M множество Мазуркевича множества $\mathscr{E}$.

Очевидно, если элементы решета C суть B-множества или C-множества классов $< \alpha$, дополнение к множеству $\mathscr{E}$ относительно J_{xy} (множество $C\mathscr{E}$) есть B-множество или C-множество, входящее в B-тело на C-множествах классов $< \alpha$. Поместим в плоскость OXZ решето $\overline{C}$, геометрически тождественное решету C. Пусть D есть множество всех точек пространства $OXYZ$, проектирующихся в $\overline{C}$. Обозначим через Θ множество всех точек пространства $OXYZ$, проекции которых на OXY принадлежат $C\mathscr{E}$, а координата z рациональна. Пусть D' есть множество точек $(x_0 y_0 z_0)$, принадлежащих D и таких, что $z_0 < y_0$. Мы докажем, что решето $\Xi = D' + \Theta$ определяет в фундаментальной области J_{xy} дополнение к множеству M и что оно имеет указанное в лемме свойство.

Если точка $(x_1 y_1) \subset C\mathscr{E}$, то проведенная через нее параллель оси OZ пересекает Ξ по множеству всех рациональных чисел. Следовательно, $(x_1 y_1)$ не входит в множество, дополнительное

к определенному решетом Ξ. Если точка $(x_1y_1) \subset \mathcal{E}$, то указанная параллель пересекает Ξ по множеству, тождественному части решета C, лежащей на интервале $(x = x_1,\ y < y_1)$. В случае, если на прямой $x = x_1$ есть хоть одна точка множества $\mathcal{E}$ ниже точки (x_1y_1), то это множество не вполне упорядочено вверх. Следовательно, оно вполне упорядочено вверх в том и только в том случае, когда $(x_1y_1) \subset M$, и в этом случае его тип равен номеру конституанты множества E, в которую точка (x_1y_1) проектируется.

Ч. Т. Д.

Из теоремы Е. А. Селивановского [3] о том, что конституанты A-множества всегда образуют регулярное относительно меры и категории разбиение этого множества, следует, что проекции конституант множества Мазуркевича для A-множеств также имеют это свойство.

10. Прежде всего мы покажем, что регулярность CA-кривой есть свойство самой кривой, а не решета, ее определяющего*.

ЛЕММА VI. *Если проекции конституант некоторой CA-кривой $\mathcal{E}$, определенные B-решетом C_1, образуют регулярное относительно меры разбиение проекций этой кривой, то конституанты, определенные любым другим B-решетом C_2, определяющим ту же кривую $\mathcal{E}$, также имеют это свойство.*

Доказательство. Пусть E есть проекция $\mathcal{E}$. Обозначим через $\mathcal{E}_\alpha^1$ и $\mathcal{E}_\alpha^2$ конституанты множества E, определенные решетами C_1 и C_2. Пусть E_α^1 и E_α^2 суть проекции множеств $\mathcal{E}_\alpha^1$ и $\mathcal{E}_\alpha^2$. В силу регулярности семейства множеств E_α^1 существует такое число β, что множество $\Theta_\beta = \sum\limits_{\alpha<\beta} \mathcal{E}_\alpha^1$ проектируется в множество, мера которого равна мере множества E. Как известно**, существует такое число γ, что

$$\Theta_\beta \subset \sum_{\alpha<\gamma} \mathcal{E}_\alpha^2.$$

Следовательно, сумма проекций первых γ конституант $\mathcal{E}_\alpha^2$ имеет ту же меру, что и E.

Ч. Т. Д.

Мы покажем ниже, что CA-кривые, построенные нами в первой главе, регулярны. Однако семейство всех C-нормальных CA-кривых, вообще говоря, шире, чем семейство кривых, построенных указанным нами методом. CA-кривые, полученные указанным методом, мы будем называть индуктивными кривыми.

---

* CA-кривую мы будем называть регулярной, если для нее существует решето такое, что проекции конституант образуют регулярное относительно меры разбиение проекции самой кривой.

** См. [2], стр. 183.

ЛЕММА VII. *Всякая C-нормальная CA-кривая есть проекция некоторой индуктивной CA-кривой.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}$ есть некоторая C-нормальная CA-кривая. Обозначим через β верхнюю грань классов C-множеств, являющихся проекциями бэровских (y)-порций кривой $\mathscr{E}$. Мы можем построить некоторое C-решето класса β, ядром которого является множество $\mathscr{E}$. Для этого на верхнюю сторону каждого прямоугольника Бэра ранга k мы должны поместить проекцию части кривой $\mathscr{E}$, заключенной в этом прямоугольнике. Пусть C обозначает это решето. Так как элементы этого решета суть C-множества классов $\leqslant \beta$, то для них существуют индуктивные β-нормальные CA-кривые, имеющие эти элементы в качестве проекций. Такие же кривые существуют для дополнений к этим элементам до содержащих их сторон прямоугольников Бэра. Так же, как мы это делали в теореме III первой главы, с помощью этих CA-кривых мы можем построить индуктивную CA-кривую E, проектирующуюся в ядро решета C, т. е. в кривую $\mathscr{E}$.

ч. т. д.

Следствие. Если все индуктивные кривые регулярны, то все C-нормальные кривые также регулярны.

Действительно, всякое счетное множество конституант множества E проектируется на плоскость OXY в некоторое B-множество, входящее в $\mathscr{E}$. Это последнее входит в сумму некоторой счетной системы конституант множества $\mathscr{E}$.

11. В дальнейшем нам понадобится следующая лемма:

ЛЕММА VIII. *CA-часть Ψ регулярной CA-кривой Ξ, проектирующаяся в множество E, допускающее некоторое регулярное относительно меры разбиение на $\aleph_1$ B-множество*

$$E = \sum_{\alpha<\Omega} E^{\alpha},$$

необходимо есть регулярная CA-кривая.

Доказательство. Обозначим через Ξ_α конституанты множества Ξ, а через N проекцию Ξ на ось OX. Тогда существует такое число β, что $\sum\limits_{\alpha<\beta} \Xi_\alpha = \Theta_\beta$ проектируется на ось OX в полную меру множества N.

Кроме того, существует такое число γ, что множество

$$\Sigma_\gamma = \sum_{\alpha<\gamma} E^{\alpha}$$

имеет ту же меру, что и множество E. Очевидно, часть множества Θ_β, проектирующаяся в Σ_γ, есть B-множество, входящее в множество Ψ. Следовательно, оно заключено в некоторой счет-

ной системе конституант множества Ψ. Проекция этой системы конституант на ось OX имеет ту же меру, что и множество E.

Ч. Т. Д.

12. Теперь мы приступим к доказательству основной теоремы.

ТЕОРЕМА IV. *Всякое C-множество есть проекция CA-кривой, регулярной относительно меры и категории.*

Мы докажем только часть теоремы, касающуюся меры. Все рассуждения могут быть немедленно перенесены на случай категории.

План доказательства будет таков: считая, что все индуктивные кривые, определяющие C-множества классов $< \alpha$ и их дополнения, регулярны, мы покажем, что построенная нами в первой главе CA-кривая, проектирующаяся в C-множество класса α, регулярна. Затем мы покажем, что построенная П. С. Новиковым и рассмотренная нами выше кривая, проектирующаяся в множество Мазуркевича ядра покрывающего решета, при тех же индуктивных предположениях, регулярна. Отсюда на основании леммы VIII и того, что для всякого C-множества существует регулярное разбиение (4, 5), будет следовать регулярность кривой, построенной П. С. Новиковым для дополнений к C-множествам класса α. Таким образом будет доказана регулярность всех индуктивных кривых. Отсюда на основании следствия из леммы VIII получится регулярность всех C-нормальных CA-кривых.

На основании леммы VI мы будем при доказательстве теоремы для C-множеств класса α строить некоторое специальное решето, имеющее указанное свойство.

Доказательство теоремы для C-множеств класса α. Очевидно, при построении методом В. К. Серпинского униформной CA-кривой для множества-произведения проекций конечного или счетного числа регулярных CA-кривых автоматически получается регулярная CA-кривая. Поэтому, если предположить, что все CA-кривые, с помощью которых были построены поверхности Φ, были регулярны, то все кривые, являющиеся проекциями частей поверхностей Σ_n' *, расположенных над некоторым прямоугольником Бэра ранга n плоскости OXY, на плоскость OXZ, также будут регулярными кривыми. Следовательно, можно фиксировать такое число β, что множество точек оси OX, в которые проектируется по крайней мере одна конституанта по крайней мере одной из поверхностей Σ_n' номера $> \beta$, есть множество меры нуль. Обозначим через Q_β дополнение к этому множеству.

* Через Σ_n' мы обозначаем CA-поверхности, проектирующиеся в сумму прямоугольников π ранга n, из которых строится поверхность Σ. Все остальные обозначения те же, что и в теореме II.

Очевидно, Q_β есть B-множество. Очевидно, далее, что часть поверхности Σ', проектирующаяся в Q_β, состоит из конституант этой поверхности, номера которых не превосходят $\beta \cdot \omega^2$. Это справедливо также и для части поверхности Θ', проектирующейся в часть множества E, входящую в Q_β.

Обозначим через Λ^β и Θ'^β части множеств Λ и Θ', проектирующиеся в Q_β. Рассмотрим теперь плоское решето C^β, построенное следующим образом. Пусть π есть прямоугольник ранга n, верхняя сторона которого есть элемент решета D. Расположим на этой стороне проекцию первых β конституант части поверхности Θ_n *, расположенной над прямоугольником π. Очевидно, это есть некоторое решето, измеримое B и такое, что множество точек оси OX, где оно не вполне упорядочено вверх, содержит часть множества E, входящую в Q_β.

Точки множества Мазуркевича ядра решета C, в которые проектируются точки поверхности Θ', входящие в конституанты номеров $\leqslant \beta \cdot \omega^2$, очевидно принадлежат множеству Мазуркевича ядра решета C^β.

Из леммы V о конституантах множества Мазуркевича следует, что это множество от ядра решета C есть регулярная CA-кривая **.

Теперь для множества Λ мы построим решето следующим образом: так как Θ'^β есть B-множество, то оба множества Λ^β и $\Lambda - \Lambda^\beta$ суть аналитические дополнения. Второе проектируется на ось OX в множество меры нуль. Пусть новое решето для этого множества совпадает с частью прежнего решета для множества Λ, проектирующейся на ось OX в множество CQ_β.

Пользуясь тем, что множество Θ'^β измеримо B, мы построим для него решето с ограниченными типами. Затем, как обычно, для множества Λ^β мы построим решето, исходя из решет для множеств Θ'^β, множества Мазуркевича ядра решета C и множества Q_β. Очевидно, последнее решето будет с ограниченными типами ***. При этом, очевидно, регулярность решета сохранится, так как индексы конституанты указанного решета и проектирующейся в нее конституанты множества Λ_β будут отличаться друг от друга лишь на ограниченную величину.

Этим регулярность индуктивной кривой, проектирующейся в C-множество класса α, доказана.

Доказательство теоремы для дополнений. Как отмечено выше, достаточно показать регулярность CA-кривой Ξ,

---

* Θ_n есть то же по отношению к Θ, что Σ'_n по отношению к Σ'.

** Так как Е. А. Селивановским была доказана регулярность внутренних конституант A-множества относительно меры и категории. См. лит. ([3]).

*** Заметим, что все точки множества Мазуркевича ядра решета C^β, проектирующиеся в Q_β, принадлежат множеству Мазуркевича ядра решета C.

построенной П. С. Новиковым, проектирующейся в множество Мазуркевича решета D и содержащей CA-кривую Ψ, проектирующуюся в дополнение к результату (A)-операции. Эта кривая совпадает с частью поверхности Σ, проектирующейся в указанное множество Мазуркевича. Очевидно, для нее можно построить регулярное решето таким же методом, как в первой части доказательства оно было построено для множества Λ.

Тем самым теорема доказана для дополнений к C-множествам класса α. На основании замечаний, сделанных в начале доказательства, она доказана для всех C-нормальных CA-кривых.

Ч. Т. Д.

Таким образом *разбиения C-множеств на проекции конституант C-нормальных CA-кривых всегда регулярны относительно меры и категории.*

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Инвариантность A_2'-множеств относительно A-операций

13. В цитированном мемуаре П. С. Новикова об униформных аналитических дополнениях теорема о C-множествах доказана следующим образом: сперва доказано, что результат (A)-операций над B_2'-множествами приводит к CA_2'-множествам; затем доказано, что он приводит к A_2'-множествам. Мы дадим обобщение второй части этого доказательства: докажем, что результат A-операций над A_2'-множествами также приводит к A_2'-множествам.

ЛЕММА IX. *Пусть $\mathcal{E}$ есть униформная относительно оси OZ CA-поверхность, лежащая в пространстве $OXYZ$ и имеющая следующие свойства:*

1) *всякая плоскость* $x = \text{const}$ *пересекает $\mathcal{E}$ по B-множеству*,*
2) *поверхность $\mathcal{E}$ ограничена снизу по OY.*

В таком случае поверхность $\mathcal{E}$ может быть униформизирована относительно плоскостей $x = \text{const}$ CA-множеством.

Доказательство. Пусть поверхность $\mathcal{E}$ определена четырехмерным решетом C, расположенным в пространстве $OXYZT$. Заметим прежде всего, что часть поверхности $\mathcal{E}$, принадлежащая некоторой плоскости, необходимо заключена в сумме счетного числа конституант, определенных решетом C.

Рассмотрим в пространстве $OXYZU$ множество E точек $(x'y'z'u')$ таких, что $u' \geqslant y'$ и точка $(x'y'z')$ принадлежит множеству $\mathcal{E}$. Очевидно, E есть CA-множество. Можно построить для

* Это ограничение несущественно, как это следует из работы П. С. Новикова [6].

Однако мы оставили это ограничение, чтобы была ясна полная независимость всей конструкции от проблемы совершенного ядра.

него в пространстве $OXYZUT$ решето C' такое, что индекс этого решета в точке $(x_1 y_1 z_1 u_1)$ равен индексу решета C в точке $(x_1 y_1 z_1)$, если $u_1 \geqslant y_1$. Пусть Ξ есть множество точек трансфинитной единственности множества E относительно плоскостей ($x = \text{const}$, $u = \text{const}$). Ξ есть также CA-множество. Обозначим через Θ часть множества Ξ, принадлежащую многообразию $u = y$. Это также CA-множество. Пусть Σ есть ортогональная проекция множества Θ на пространство $OXYZ$. Мы докажем, что Σ есть CA-множество, имеющее не больше, чем счетное число точек в каждой плоскости $x = \text{const}$, и что это множество действительно имеет точки во всякой плоскости, в которой существует по крайней мере одна точка множества $\mathcal{E}$.

Прежде всего, так как многообразие $y = u$ униформно относительно оси OU, то Σ есть дополнение к ортогональной проекции на $OXYZ$ дополнения к множеству Θ до всего многообразия $u = y$, а так как это последнее множество есть A-множество, то Σ есть CA-множество.

Далее, во всяком многообразии $x = \text{const}$, очевидно, содержатся точки множества E, принадлежащие только счетной системе конституант этого множества. Так как вдоль всякой параллели оси OU все точки, принадлежащие множеству E, входят в одну и ту же его конституанту, то точки трансфинитной единственности множества E могут проектироваться в пространство $OXYZ$ только в такие точки $(x_1 y_1 z_1)$ множества $\mathcal{E}$, которые имеют то свойство, что ни одна точка $(x_1 y_2 z_2)$, такая, что $y_2 < y_1$, и входящая в множество $\mathcal{E}$, не входит в конституанты, номер которых меньше, чем номер конституанты, содержащей точку $(x_1 y_1 z_1)$. Следовательно, в каждой плоскости $x = \text{const}$ точек множества Σ будет не больше, чем различных конституант множества E, т. е. счетное число.

Очевидно, далее, что всякая точка, для которой выполнено условие 2) нашей леммы *, необходимо входит в множество Σ. Таким образом множество Σ есть счетно-формное относительно плоскостей $x = \text{const}$ CA-множество, заключенное в поверхности $\mathcal{E}$ и такое, что его проекция на ось OX совпадает с проекцией на эту ось всей поверхности $\mathcal{E}$.

Однако П. С. Новиков доказал, что всякое счетно-формное CA-множество может быть униформизировано CA-множеством [6]. Следовательно, это имеет место по отношению к множеству Σ, а также и по отношению к поверхности $\mathcal{E}$.

Ч. Т. Д.

---

* Т. е. она является минимальной по OY точкой.

Следствие. Проекция на ось OX CA-поверхности $\mathcal{E}$, имеющей свойство 2), необходимо есть A_2'-множество.

14. На основании этой леммы мы докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА V. *(A)-операция над A_2'-множествами всегда приводит к A_2'-множествам.*

Доказательство. Пусть множество E, лежащее на оси OX, есть результат (A)-операций над A_2'-множествами. В таком случае существует некоторое элементарное плоское решето, состоящее из A_2'-множеств, определяющее множество E. Обозначим через D элементарное решето, состоящее из верхних сторон прямоугольников, покрывающее решето C.

Следуя методу П. С. Новикова *, построим ограниченную снизу по OY CA-поверхность, имеющую свойство 1) и проектирующуюся на ось OX в множество E. Пусть c есть некоторый элемент решета C, расположенный на верхней стороне некоторого прямоугольника π ранга n, входящего в число прямоугольников, образующих решето D. Обозначим через c^* гребенку, состоящую из точек прямоугольника π, проектирующихся в множество C. Очевидно, в пространстве $OXYZ$ существует некоторая униформная по оси OZ CA-поверхность Φ, состоящая из отрезков, параллельных оси OY, и такая, что ее проекция на плоскость OXY есть множество c^*. Сумма всех поверхностей Φ, отвечающих множествам c^* ранга n, есть некоторая CA-поверхность, униформная по оси OZ и пересекающаяся всякой плоскостью $x=\text{const}$ по B-множеству. Методом Серпинского мы можем, исходя из этих поверхностей, построить CA-поверхность Θ, проектирующуюся в ядро решета C.

Так как решето C элементарное, то его ядро имеет на каждой пересекающей его прямой $x = \text{const}$ нижнюю точку. Следовательно, поверхность Φ имеет свойство 2); кроме того, она имеет свойство 1), так как им обладает каждая из исходных поверхностей. Следовательно, на основании предыдущей леммы, поверхность Σ может быть униформизирована CA-кривой, т. е. множество E есть A_2'-множество.

Ч. Т. Д.

Тем же методом, которым получена лемма IX, легко получить следующий результат. Назовем окаймленным слева всякое множество, содержащее свою левую грань. Эту последнюю мы назовем в этом случае левым концом множества.

Пусть E есть некоторое CA-множество, лежащее на оси OX, E_α — его конституанты. Тогда имеем:

совокупность всех левых концов множеств E_α есть CA-множества.

* См. (1) стр. 10.

И мы можем сформулировать следующую редукцию:
если существует CA-множество, имеющее несчетное число конституант, окаймленных слева (в частности, замкнутых), то существует и CA-множество без совершенного ядра.

Отметим, что из приведенной выше леммы следует, что *всякое плоское CA- или A'_2-множество, пересекающееся параллелями к оси OY по множествам замкнутым, проектируется на ось OX в A'_2-множество.*

Естественно возникает следующий вопрос: верно ли это для CA-множеств, пересекаемых по F_σ? Это особенно интересно потому, что П. С. Новиков показал, что всякое A_2-множество есть проекция CA-множества, пересекаемого по B-множествам [см. ([6]), теорема III].

15. Известно, что (A)-операция есть частный случай операции решета. Точнее: элементарное решето есть геометрическая форма (A)-операции. Однако, вообще говоря, операция решета есть операция более широкая. Например, результат (A)-операции над CA-множествами есть C-множество второго класса, тогда как результат операции решета над CA-множествами есть произвольное A_2-множество.

Мы выделим ряд случаев, в которых операция решета оказывается эквивалентной (A)-операции.

Пусть D есть некоторое семейство линейных множеств, D' некоторое семейство плоских множеств. Мы скажем, что *семейство D' D-нормально, если всякая (y)-порция всякого множества E, принадлежащего семейству D', проектируется на ось OX в некоторое множество семейства D.*

Известно, например, что счетно-формные B-множества образуют B-нормальное семейство*; A-множества образуют A-нормальное семейство; П. С. Новиков показал, что счетно-формные CA- или A'_2-множества образуют A'_2-нормальные семейства.

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА VI. *Пусть D' есть некоторое D-нормальное семейство. Тогда результат операции решета над любым множеством семейства D необходимо эквивалентен результату (A)-операции над системой множеств, принадлежащих семейству D'.*

Доказательство. Мы будем считать, что множество E семейства D' лежит в фундаментальном квадрате плоскости OXY. Пусть $\mathcal{E}$ есть множество точек x_0 оси OX таких, что прямая $x = x_0$ пересекает множество E по множеству, не вполне упоря-

* См. ([2]), стр. 178.

доченному вверх. Покажем, что $\mathcal{E}$ есть ядро некоторой (A)-операции над множествами семейства D.

Пусть π есть некоторый прямоугольник Бэра ранга n, π' прямоугольник Бэра ранга $n-1$, содержащий π. Обозначим через c ортогональную проекцию на верхнюю сторону прямоугольника π части множества E, лежащей внутри прямоугольника π' и выше прямоугольника π; e есть множество семейства D.

Обозначим через c^* множество всех точек, принадлежащих π и проектирующихся ортогонально в множество c. Пусть Ξ_n есть сумма всех гребенок c^* ранга n. Введем следующее обозначение:

$$\Xi = \overline{\lim}\, \Xi_n.$$

Очевидно, проекция Ξ на ось OX есть множество $\mathcal{E}$, так как всякой точке множества Ξ отвечает падающая последовательность множеств, имеющая ту же проекцию на ось OX, и наоборот.

Каждому прямоугольнику Бэра плоскости OXY мы поставим в соответствие некоторый прямоугольник τ плоскости OXT, имеющий ту же проекцию на ось OX, причем так, чтобы проекции всех этих прямоугольников на ось OT были попарно без общих точек и образовали вполне упорядоченное вверх семейство отрезков. Эти прямоугольники плоскости OT мы назовем прямоугольниками первого ранга.

Пусть теперь определены все прямоугольники τ плоскости OXT ранга $\leqslant n-1$. Пусть прямоугольник τ ранга $n-1$ плоскости OXT поставлен в соответствие некоторому прямоугольнику π плоскости OXY. Обозначим через $\{\pi_\xi\}$ семейство всех прямоугольников Бэра, содержащихся в π. Прямоугольнику π_ξ мы поставим в соответствие некоторый прямоугольник τ_ξ, содержащийся в прямоугольнике τ и имеющий ту же проекцию на ось OX, что и π_ξ. Кроме того, мы потребуем, чтобы все проекции прямоугольников τ_ξ на ось OT были попарно без общей точки и образовали вполне упорядоченную вверх систему интервалов. Совокупность всех таких прямоугольников τ_ξ мы назовем прямоугольниками ранга n. Очевидно, каждому из определенных нами прямоугольников τ соответствует некоторый прямоугольник π. Поместим на верхнюю сторону прямоугольника τ множество σ, геометрически тождественное множеству c; очевидно совокупность всех σ образует элементарное решето, и все эти множества принадлежат семейству D. Пусть Θ есть ядро полученного решета. Легко видеть, что всякой точке множества Θ отвечает точка множества Ξ, имеющая ту же проекцию на ось OX, т. е. проекция Θ на ось OX есть множество $\mathcal{E}$.

Ч. Т. Д.

16. Отметим некоторые следствия из полученной теоремы:

1) Теорема о том, что семейство A-множеств или A_n-множеств инвариантно относительно операции решета, на основании доказанной теоремы, есть следствие из того, что семейства A-множеств (или A_n-множеств) инвариантны относительно проекций и элементарных операций [к которым приводится (A)-операция].

2) Из доказанной нами теоремы о том, что семейство A'_2-множеств инвариантно относительно (A)-операции, следует, что операция решета над A'_2-нормальными CA- или A'_2-множествами всегда приводит к A'_2-множествам. В частности, этим свойством обладают следующие семейства CA- и A'_2-множеств:

a) счетно-формные множества;

b) множества, не имеющие ни на одной прямой $x=\text{const}$ совершенного ядра;

c) множества, пересекаемые всякой прямой $x=\text{const}$ по множеству замкнутому (или пустому).

Математич. институт им. В. А. Стеклова. Академия Наук СССР.

Поступило 10.XII 1936.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Novikoff P., Sur les projections des complémentaires analytiques uniformes, Мат. сб., т. 2 (44), № 1, 1937.

[2] Lusin N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930.

[3] Selivanowsky E., Sur les propriétés des constituantes des ensembles analytiques, Fund. Math., XX, pp. 20—28.

[4] Селивановский Е. А., Об одном классе эффективных множеств, Мат. сб. XXXV, стр. 379—413.

[5] Liapounoff A., Sur quelques propriétés des cribles etc., C. R. de Vars., XXIX, cl. III, pp. 1—8 (1936).

[6] Новиков П. С., О взаимоотношении второго класса множеств и т. д., Изв. АН, серия мат. № 2 (1937).

A. LIAPOUNOFF. SUR QUELQUES COMPLÉMENTAIRES ANALYTIQUES UNIFORMES

RÉSUMÉ

Dans le présent article nous étudions quelques phénomènes liés à l'opération (A) effectuée sur les projections des complémentaires analytiques uniformes.

Nous appelons (y)-portion d'un ensemble plan E, l'ensemble des points de E dont les projections sur l'axe OY appartiennent à une portion de cet axe, fixée à l'avance.

Étant donnée une famille d'ensembles plans $\{D'\}$ et une famille d'ensembles linéaires $\{D\}$, nous disons que les ensembles de la famille $\{D'\}$ sont D-normaux, si la projection de toute (y)-portion de tout ensemble de la famille $\{D'\}$ appartient à la famille $\{D\}$.

En particulier nous disons que les ensembles de la famille $\{D'\}$ sont α-normaux, si la famille $\{D\}$ est identique au corps minimum contenant les ensembles C de classe α.

Avec cette définition nous avons les théorèmes suivants:

THÉORÈME III. *Tout ensemble faisant partie du corps minimum, contenant les ensembles C de classe α, est la projection d'un complémentaire analytique uniforme α-normal.*

THÉORÈME IV. *Soit E un complémentaire analytique uniforme C-normal, $\mathcal{E}$ la projection de E sur l'axe OX. Les projections des constituantes de E forment toujours une décomposition de $\mathcal{E}$, régulière envers la mesure et la cathégorie.*

Nous démontrons encore le théorème suivant:

THÉORÈME V. *La famille des projections des complémentaires analytiques uniformes est invariante par rapport à l'opération* (A).

En appliquant la méthode qui nous a permit de démontrer ce dernier théorème on peut obtenir les deux propositions suivantes:

Un ensemble CA (ou bien A_2') qui est coupé par toutes les parallèles à l'axe OY suivant des ensembles fermés ou bien vides, peut toujours être uniformiser au moyen d'un ensemble de même nature.

L'existence d'un complémentaire analytique ayant une infinité non dénombrable de constituantes qui sont des ensembles fermés, entraine l'existence d'un complémentaire analytique qui ne contient aucun ensemble parfait.

РЕЗОЛЮЦИЯ

Группы математики Академии Наук СССР по докладам Институтов математики и механики от 22—23 февраля 1937 г. об итогах научной работы в 1936 г. и о тематических планах работы на 1937 г.

Заслушав доклады Математического института им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР, Механико-математического отдела Физико-технического института Академии Наук БССР, Математического института Грузинского филиала Академии Наук СССР, Научно-исследовательского института математики Московского государственного университета, Научно-исследовательского института механики Московского государственного университета и Научно-исследовательского института математики и механики Ленинградского государственного университета об итогах научной работы в 1936 г. и о тематических планах работы на 1937 г., Группа математики Академии Наук СССР констатирует, что в указанных институтах научная работа в настоящее время протекает по нижеследующим основным направлениям и проблемам.

1. Математический институт им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР

1) Исследование основных тригонометрических сумм в аналитической теории чисел и применение их к решению конкретных задач.
2) Проблема распределения простых чисел.
3) Изучение функций в алгебраических телах.
4) Исследование новых классов трансцендентных чисел.
5) Геометрия теории Галуа.
6) Изучение конечных групп.
7) Изучение топологических свойств однородных пространств.
8) Комбинаторный анализ.
9) Сходимость и суммируемость ортогональных рядов.
10) Логика суждений с бесконечным числом операций.
11) Изучение эффективных множеств.
12) Геометрическая теория функций комплексного переменного.
13) Теория интерполяции функций комплексного переменного.
14) Теория функций от матриц.
15) Линейный функциональный анализ.
16) Общая теория уравнений в частных производных гиперболического типа.
17) Уравнения в частных производных для типов, отличных от нормально гиперболического, эллиптического и параболического.
18) Обратная задача теории потенциала.
19) Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения.
20) Развитие методов приближенного решения уравнений в частных производных и интегральных уравнений.
21) Разработка методов построения и составление математических таблиц.
22) Ряд конкретных проблем механики и математической физики, имеющих приложение в технике.

2. Механико-математический отдел Физико-технического института Академии Наук БССР

1) Дифференциальная геометрия (проблема дифференциальных форм и их инвариантов).

2) Дифференциальные уравнения (проблема Пфаффа, системы дифференциальных уравнений с частными производными, приближенные методы решения дифференциальных уравнений).

3) Аналитические функции (проблема асимптотических значений аналитических функций).

4) Теория упругости и теория механических колебаний (задача о балке на упругом основании, влияние вязкости на затухание волн в земной коре).

3. Математический институт Грузинского филиала Академии Наук СССР

1) Вопросы обоснования арифметики и анализа.

2) Геометрическая теория чисел, в частности нахождение числа целых точек в многомерных эллипсоидах и гиперэллипсоидах.

3) Изучение функций двух комплексных переменных.

4) Конструктивная теория функций комплексного переменного.

5) Теория механических квадратур в связи с численным решением дифференциальных и интегральных уравнений.

6) Исследования по теории краевых задач математической физики и теории упругости методом интегральных уравнений (статические и динамические задачи).

7) Изучение теории вращающейся вязкой жидкости.

4. Научно-исследовательский институт математики Московского государственного университета

1) Качественные методы изучения обыкновенных дифференциальных уравнений.

2) Приложение функционального анализа к решению интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

3) Изучение уравнений теплопроводности в связи с соответствующими практическими задачами.

4) Общая теория систем уравнений в частных производных.

5) Построение новой систематической теории субгармонических и полигармонических функций.

6) Проблема интерполяции в комплексной области.

7) Конформные отображения и ортогональные полиномы в комплексной области.

8) Перестройка основ топологии—теория дискретных пространств, аксиоматика.

9) Завершение гомологической теории замкнутых множеств и законов двойственности.

10) Проблема отображений многообразий и теория открытых отображений.

11) Теория случайных функций, уравнения случайных процессов с их применениями в физике, биологии и т. д.

12) Предельные теоремы и арифметика законов распределения.

13) Эмпирическое определение законов распределения и ряд специальных проблем технической и биологической статистики.

14) Изучение комплексов и конгруэнций прямых и изгибаний.

15) Вопросы аксиоматики и комплексной проективной геометрии.

16) Работа по номографии.

17) Проблема метрической двойственности в дифференциальной геометрии.

18) Инварианты тензоров различных типов.

19) Теория сетей на поверхностях.

20) Изучение специальных вопросов теории конечных групп.

21) Теория бесконечных групп.

22) История, философия математики и математическая логика.

5. Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета

1) Вариационные принципы механики.

2) Теория гироскопов и ее технические приложения.

3) Общая гидромеханика.

4) Проблема колебаний тел, погруженных в жидкость.

5) Экспериментальное исследование гидродинамических спектров.

6) Теория гидравлического удара.

7) Теория турбулентности и пограничного слоя.

8) Теория крыла.
9) Теория штопора.
10) Динамика полета.
11) Контактные проблемы теории упругости.
12) Теория пластичности.
13) Общая и прикладная теории упругости.
14) Теория конечных деформаций.

6. Научно-исследовательский институт математики и механики Ленинградского государственного университета

а) По отделу математики

1) Некоторые вопросы обоснования математики.
2) Теория квадратичных форм.
3) Теория бесконечных дискретных групп.
4) Аналитическая теория чисел.
5) Геометрия выпуклых поверхностей в целом.
6) Некоторые вопросы теории правильного разбиения пространства.
7) Теория узлов.
8) Вопросы приближения в теории функций вещественного переменного.
9) Механические квадратуры.
10) Вопросы функционального анализа для линейных пространств и теория полуупорядоченных пространств.
11) Экстремальные задачи геометрической теории функций комплексного переменного.
12) Аналитическая теория линейных интегральных уравнений и теория фундаментальных функций комплексного переменного.
13) Теория функций матриц и ее приложения к линейным дифференциальным уравнениям.
14) Периодические движения и устойчивость для обыкновенных уравнений и уравнений в частных производных.
15) Предельные задачи уравнений в частных производных.
16) Сингулярные и нелинейные интегральные уравнения.
17) Общая теория уравнений в частных производных.
18) Предельные теоремы для цепей Маркова.

б) По отделу механики

1) Методика оптического метода исследования напряжений.
2) Экспериментально-теоретические исследования напряжений в изотропных и анизотропных телах.
3) Изучение напряжений и устойчивости оболочек.
4) Некоторые вопросы линейных и нелинейных колебаний.
5) Изучение механики пластически деформируемого тела и усовершенствование теории пластичности металлов.
6) Различные вопросы взаимодействия твердого тела с потоком.
7) Методика измерения сил давления и скоростей в турбулентном и неустановившемся потоках.
8) Турбулизирующее влияние поверхности тела на обтекающий его поток.
9) Применение метода математической статистики к изучению турбулентного потока.
10) Различные проблемы газовой динамики.

В результате обсуждения докладов всех указанных институтов, Группа математики пришла к следующим выводам:

1) Группа обращает внимание институтов на желательность при планировании исходить не только из существующих уже конкретных работ, а из необходимости направлять работу ближайших лет по новым крупным и актуальным проблемам. Для этого целесообразно организовывать предварительные семинары, посвященные изучению соответствующего вопроса, считая это одним из важнейших моментов плановой работы. При этом необязательно фиксировать получение результатов в течение ближайшего времени. Отметить в этом отношении удачный опыт Научно-исследовательского института математики и механики ЛГУ (функциональный анализ, приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных и вопросы акустики).

2) Считать важным четкую организацию коллективной работы в институтах по отделам или небольшому числу руководящих постоянных семинаров, объединяющих всех сотрудников, работающих в соответствующем направлении.

3) Отметить, что во всех математических институтах, не говоря уже о механических институтах, большинство тем которых тесно связано с заданиями промышленности, имеется конкретно выраженная тенденция приближения основной теоретической тематики к запросам практики. В качестве примеров можно указать следующие: Математический институт Академии Наук—эффективные методы конформных отображений, задачи математической физики, эффективные методы анализа; Научно-исследовательский институт математики МГУ—работы по теории вероятностей, ряд работ по задачам теплопроводности, сближение исследований по качественным методам анализа с непосредственными запросами радиотехники и механики; Научно-исследовательский институт математики и механики ЛГУ—постановка работ по предельным задачам уравнений в частных производных (акустика), приближенные методы решения интегральных уравнений в применении к задачам гидромашиностроения; Отдел математики и механики при Физико-техническом институте Академии Наук БССР—приближенные методы решения дифференциальных уравнений, задачи теории упругости; Институт математики Грузинского филиала Академии Наук—ряд проблем теории упругости и распространения электромагнитных волн.

4) Наряду с этим Группа считает важным дальнейшее развертывание специальных прикладных отделов, которые должны опираться на работу теоретических отделов институтов и установить непосредственный контакт с техническими институтами и производственными организациями.

5) Группа придает большое значение развитию в институтах консультационной работы, особенно в областях техники, не имеющих своей собственной математической базы.

6) Отмечая тот факт, что ряд математических институтов принимает участие в работе по средней школе, считать весьма желательным усилить эту отрасль работы институтов.

7) Считать желательным установить более тесную связь сотрудников московских и ленинградского институтов с периферийными математическими институтами. При этом следует отметить слабую использованность сотрудников Ленинградского института для выездов в периферийные институты. Наряду с этим желательно усилить научные командировки сотрудников периферийных институтов в крупные математические центры.

8) Группа отмечает, что все институты уделяют большое внимание вопросу подготовки аспирантуры, причем научная работа аспирантов занимает заметное место в тематических планах работ самих институтов.

9) Группа считает необходимым сосредоточить подготовку аспирантов в основных математических институтах, где аспиранты могут быть обеспечены высококвалифицированным научным руководством. Наряду с этим необходимо отметить настоятельную необходимость создания для аспирантов университетских институтов благоприятных материальных условий для научной работы.

10) Группа констатирует совершенную недостаточность имеющихся кадров по механике. Необходимо обратить самое серьезное внимание на подготовку новых кадров (методы подготовки, число аспирантов и т. п.).

11) Группа поддерживает ходатайство Научно-исследовательского института математики и механики ЛГУ перед Наркомпросом РСФСР и Комитетом по делам высшей школы об утверждении в настоящее время в этом институте четырех новых вакантных мест для аспирантов, ввиду наличия соответствующих кандидатов из числа окончивших Ленинградский университет.

12) Принимая во внимание, что Ленинград является крупным математическим центром, считать желательным организацию в Ленинграде математического журнала типа «Математического сборника».

13) Признавая, что экспериментальная работа в современной механике имеет большое значение, считать необходимым расширение существующих механических лабораторий. В частности, необходимо расширение помещений и снабжение лабораторий точной измерительной аппаратурой.

14) Группа считает весьма желательным усиление отпуска валютных средств научно-исследовательским институтам математики и механики Московского и Ленинградского университетов для приобретения иностранной литературы и научного оборудования.

Оглавление

Sommaire

АВТОРЫ СТАТЕЙ ЭТОГО ВЫПУСКА И ИХ АДРЕСА
LES AUTEURS DES ARTICLES DE CE FASCICULE ET LEURS ADRESSES

1. **Венков** Борис Алексеевич, Кирочная ул., 7, кв. 5, Ленинград.
   B. Wenkoff, rue Kirotchnaya, 7, app. 5, Leningrad.
2. **Гончаров** Василий Леонидович, Ленинградское шоссе, 161, кв. 25, Москва.
   W. Gontcharoff, Leningradskoye chaussée, 161, app. 25, Moscou.
3. **Геронимус** Яков Лазаревич, Электротехнический институт, Харьков, 21.
   J. Geronimus, Institut Électrotecnique, Kharkow, 21.
4. **Меньшов** Дмитрий Евгеньевич, Б. Божениновский пер., 5, кв. 14, Москва.
   D. Menchoff, Bolchoy Bojeninowskiy péréoulok, 5, app. 14, Moscou.
5. **Новиков** Петр Сергеевич, Б. Калужская, 67, Москва.
   P. Nowikoff, rue Bolchaya Kaloujskaya, 67, Moscou.
6. **Келдыш** Людмила Всеволодовна, Б. Калужская, 67, Москва.
   L. Keldych, rue Bolchaya Kaloujskaya, 67, Moscou.
7. **Ляпунов** Алексей Андреевич, Хавская ул., 18/2, кв. 4, Москва.
   A. Liapounoff, rue Havskaya, 18/2, app. 4, Moscou.

Адрес редакции: Москва, Б. Калужская, 67, тел. В 3—47—38.
Adresse du Bureau de Rédaction: rue Bolchaya Kaloujskaya, 67, Moscou.

Редактор серии **В. А. Толстиков** Технический редактор **Е. Шнобель**

Сдано в набор 25/IV 1937 г. Подписано к печати 22/IX 1937 г.
Формат 72 × 108 см. 11 печ. л. 45.760 зн. в печ. л. Уполн. Главлита Б-19229.
Тираж 2350 экз. Заказ 807. АНИ № 617.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., д. 9